Concours Blanc « Mines-Centrale » Pc-Psi

Composition de Mathématiques
Durée 4 heures

~~Concours Blanc~~ DNS 9* « Mines-Centrale » Pc-Psi

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Aucun document autorisé ; calculatrice et tout matériel électronique interdits

Problème 1
Transformations intégrale

Problème 1 : Centrale-Supelec psi 2016

Ce problème aborde l'étude de deux transformations intégrales utilisées pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier et celle de Laplace. Chacune d'elles permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie I étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie II aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie VI utilise un résultat classique de probabilité pour démontrer l'injectivité de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles hors d'un segment.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Partie I –Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f\in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi\in\mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\xi}\,\mathrm{d}t$$

I.A On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[-\frac12,\frac12]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

I.B On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \psi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\quad\text{et}\quad \psi(0)=1$$

I.B.1 Montrer que ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

I.B.2 Prouver

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_n^{n+1}|\psi(x)|\,\mathrm{d}x\geq\frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

I.C Soit $f \in E_{cpm}$. montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

I.D.1 Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.D.2 Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2\mathrm{i}\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\xi}\ \mathrm{d}t$$

I.E On considère la fonction $\theta\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

I.E.1 justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$$

I.E.2 Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\ \mathrm{d}x = 1$.

Correction :

I.A La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (discontinuité en $\pm\frac{1}{2}$ avec des limites à droite et à gauche). Ainsi φ est intégrable sur $[-1, 1]$, comme φ est nulle sur $[1, +\infty[$ (resp. $]-\infty, -1]$) elle y est intégrable. On vient de montrer que : $\boxed{\varphi \in E_{cpm}}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^\star$ on a directement : $\mathcal{F}(\varphi)(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}}{2\mathrm{i}\pi x}\right]_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. De plus $\boxed{\mathcal{F}(\varphi)(0) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}t = 1}$. *Remarque* $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.B

I.B.1 La fonction ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$. Elle est continue en 0 car $\psi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi x}{\pi x} = 1$, et, pour $x \neq 0$, $\psi'(x) = \dfrac{\pi^2 x\cos(\pi x) - \pi\sin(\pi x)}{\pi^2 x^2} = \dfrac{1}{\pi^2 x^2}\left(\pi^2 x(1 + \underset{x\to 0}{o}(x)) - \pi(\pi x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, ainsi ψ est dérivable en 0 et ψ' est continue sur en 0 (et $\psi'(0) = 0$), ainsi $\boxed{\psi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Remarque : dans le sujet la question était : "Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.".
Correction : On sait que sin est DSE de rayon infini, ainsi pour $x \neq 0$ on a : $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$. La formule est encore vérifiée pour $x = 0$. On a donc trouvé le DSE de ψ et montré que son rayon de convergence est infini. Comme la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son disque ouvert de convergence, on a que : $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

I.B.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [n, n+1]$, on a $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\displaystyle\int_n^{n+1} |\psi(x)|\ \mathrm{d}x \geq \frac{1}{\pi(n+1)}\int_n^{n+1} |\sin(\pi x)|\ \mathrm{d}x$. Comme $x \mapsto |\sin(\pi x)|$ est 1-périodique, $\displaystyle\int_n^{n+1} |\sin(\pi x)|\ \mathrm{d}x = \int_0^1 |\sin(\pi x)|\ \mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi x}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$. On en déduit donc que $\boxed{\displaystyle\int_n^{n+1} |\psi(x)|\ \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}}$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on a : $\displaystyle\int_0^n |\psi(x)|\ \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (divergence de la série harmonique). Ceci montre que la fonction $M \mapsto \int_0^M |\psi(x)|$ qui est croissante diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, ainsi ψ n'est pas intégrable et en particulier $\boxed{\psi \notin E_{cpm}}$.

I.C Soit $f \in E_{cpm}$, appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètres. On a :

— $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

— $\forall t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

— Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, pour $(x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}$, $|f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}| = |f(t)|$, la fonction de domination (qui est bien indépendante de x) est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et donne $\boxed{\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R})}$.

I.D

I.D.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis. Comme $x \mapsto x^{n+3} f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ on a que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 x^n f(x) = 0$ (comme produit d'une fonction qui tend vers 0, $x \mapsto \frac{1}{x}$ en l'occurrence, et d'une fonction bornée), ainsi $x^n f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(1/x^2)$, on a donc l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, il en va de même en $-\infty$. On a bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

I.D.2 On va maintenant appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres. On a :

— $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

— $\forall t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pou $n \in \mathbb{N}^\star$ sa dérivée n-ième est $x \mapsto (-2\mathrm{i}\pi)^n t^n f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}$.

— $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t \mapsto (-2\mathrm{i}\pi)^n t^n f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

— Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $(x,t) \in [-a,a] \times \mathbb{R}$ on a $|(-2\mathrm{i}\pi)^n t^n f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}| = (2\pi)^n |t^n f(t)|$. La fonction de domination (qui est bien indépendante de x) est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf I.D.1).

Le théorème s'applique et donne $\boxed{\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a : $\boxed{(\mathcal{F}(f))^{(n)}(x) = (-2\mathrm{i}\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}\, \mathsf{d}t}$.

I.E

I.E.1 La fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k \theta(x) = 0$ (par croissances comparés), ainsi (définition de la limite avec un $\varepsilon = 1$ par exemple) $x \mapsto x^k\theta(x)$ est bornée sur $[1, +\infty[$, comme elle est bornée sur $[0,1]$ (fonction continue sur un segment) elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}$ (car est paire ou impaire en fonction de la parité de k). On viens donc de montrer que : $\boxed{\theta \in \mathcal{S}}$.

La question précédente donne la dérivabilité de $\mathcal{F}(\theta)$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)'(x) = (-2\mathrm{i}\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\pi t^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}\, \mathsf{d}t$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)'(x) + 2\pi x \mathcal{F}(\theta)(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi t - 2\mathrm{i}\pi x)\mathrm{e}^{-\pi t^2 - 2\mathrm{i}\pi xt}\, \mathsf{d}t = \left[\mathrm{e}^{-\pi t^2 - 2\mathrm{i}\pi xt}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{F}(\theta) \text{ est solution de}}$: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi x y(x) = 0}$.

I.E.2 On résout cette EDL$_1$: les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\pi x^2}$ où C est une constante. Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)(x) = C\mathrm{e}^{-\pi x^2}$, or $\mathcal{F}(\theta)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, \mathsf{d}x = 1$, ainsi $C = 1$. D'où : $\boxed{\mathcal{F}(\theta) = \theta}$.

Remarque : $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, \mathsf{d}x$ est l'intégrale de Gauss.

Partie II –Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\, \mathsf{d}\xi \qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathcal{F}(\theta)(t)\, \mathsf{d}t$$

II.A Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\, \mathsf{d}\xi$.

II.B Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

II.C Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_n$.

On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}\, \mathsf{d}\xi\right)\mathsf{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}\, \mathsf{d}t\right)\mathsf{d}\xi$$

II.D Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\, \mathsf{d}\xi$.

En déduire en utilisant la fonction $h\ :\ t\mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi}\ \mathsf{d}\xi \tag{2.1}$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

II.E Une application

Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi x}}{1+(2\pi\xi)^2}\ \mathsf{d}\xi=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

Correction :

II.A Pour $n\in\mathbb{N}$ on introduit $u_n : x\mapsto\mathcal{F}(f)(x)\theta\left(\frac{x}{n}\right)$ et on va utiliser le théorème de convergence dominée. On a :

- La fonction θ étant continue en 0 (et $\theta(0)=1$), (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{F}(f)$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est continue sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour la limite simple de (u_n).
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|u_n(x)|\leq|\mathcal{F}(f)(x)|$ (car $|\theta|$ est majorée par 1),la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le TCD s'applique et donne que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f)(x)\ \mathsf{d}x}$.

II.B On va encore appliquer le TCD, pour $n\in\mathbb{N}$ on introduit (on a montré en I.E.2 que : $\mathcal{F}(\theta)=\theta$) : $v_n : t\mapsto\theta(t)f\left(\frac{t}{n}\right)$.

- Comme f est continue en 0, (v_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(0)\theta$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, v_n est continue sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour la limite simple de (v_n).
- Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, comme $f\in\mathcal{S}$ et donc f est bornée sur $\mathbb{R}$, on a :$|v_n(x)|\leq\|f\|_\infty\theta(x)$, la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi le TCD s'applique et donne : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=f(0)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\ \mathsf{d}t=f(0)}$.

II.C En utilisant la définition de $\mathcal{F}(f)$, on a :$I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}\theta\left(\frac{x}{n}\right)\ \mathsf{d}t\right)\ \mathsf{d}x$. La formule de Fubini donne alors : $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}\theta\left(\frac{x}{n}\right)\ \mathsf{d}x\right)\ \mathsf{d}t$. Dans l'intégrale interne on procède au changement de variable $u=x/n$ (linéaire donc licite) et on trouve que $I_n=n\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-2in\pi ut}\theta(u)\ \mathsf{d}u\right)\ \mathsf{d}t$. Dans l'autre intégrale on procède au changement de variable $v=nt$ (linéaire donc licite) et on trouve : $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ut}\theta(u)\ \mathsf{d}u\right)\ \mathsf{d}t$. Ainsi $I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{t}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ut}\theta(u)\ \mathsf{d}u\right)\ \mathsf{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{t}{n}\right)\mathcal{F}(\theta)(t)\ \mathsf{d}t=J_n$, on a bien montré : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ I_n=J_n}$.

II.D En faisant tendre n vers $+\infty$ dans II.C et en utilisant les limites calculées en II.A et II.B on a : $\boxed{f(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f)(x)\ \mathsf{d}x}$.

Fixons $x\in\mathbb{R}$ et utilisons la fonction $h : t\mapsto f(x+t)$. Cette fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, vérifions qu'elle est dans $\mathcal{S}$, soit $k\in\mathbb{N}$, pour $t\in\mathbb{R}$ tel que $|t|>|x|+1$ (pour pouvoir diviser par $(x+t)$), $t^kh(t)=t^kf(x+t)=\underbrace{\dfrac{t^k}{(x+t)^k}}_{\xrightarrow[t\to\pm\infty]{}1}\underbrace{(x+t)^kf(x+t)}_{\text{borné car }f\in\mathcal{S}}$. Ce qui montre que h est bornée au voisinage de $\pm\infty$ donc sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle y est continue.

En appliquant ce qu'on a fait en début de question à h on a : $f(x)=h(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(h)(y)\ \mathsf{d}y$. Il ne reste plus qu'a effectuer le changement de variable $u=x+t$ (affine donc licite) pour obtenir : $\mathcal{F}(h)(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ty}\ \mathsf{d}t=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi uy}\ \mathsf{d}u=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}\mathcal{F}(f)(y)$. On a donc montré que : $\boxed{f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}\mathcal{F}(f)(y)\ \mathsf{d}y}$.

II.E La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ est dans $\mathcal{S}$ (elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par toute puissance de x par croissances comparées). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|-2\pi itx}\,\mathrm{d}t$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t(1-2\pi ix)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0 ++\infty \mathrm{e}^{t(-1-2\pi ix)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{1-2\pi ix}\mathrm{e}^{t(1-2\pi ix)}\right]_{t=-\infty}^{t=0} - \left[\frac{1}{1+2\pi ix}\mathrm{e}^{t(-1-2\pi ix)}\right]_{t=0}^{t=+\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\pi ix} + \frac{1}{1+2\pi ix}\right) \\
&= \frac{1}{1+4\pi^2x^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question précédente, on a montré, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que : $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}}{1+(2\pi y)^2}\,\mathrm{d}y}$.

Partie VI –Transformation de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. On définit la fonction $\mathcal{L}(f)$(*transformée de Laplace de f*) sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

On admettra que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} f(t)t^n\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Rappelons que, pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

VI.A On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

VI.A.0 Démontrer que la somme de deux variable aléatoire indépendantes et suivant une loi de Poisson suit encore une loi de Poisson.

VI.A.1 Par récurrence, démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de poisson de paramètre $n\lambda$.
On admettra que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

VI.A.2 Soit $\varepsilon > 0$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

VI.A.3 Soit $\varepsilon > 0$. Justifier les deux inclusions suivantes :

$$(S_n > n(\lambda+\varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

$$(S_n \leq n(\lambda-\varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

VI.A.4 Dans toutes les questions qui suivent, on suppose $x \geq 0$.
Déduire du VI.A.3 que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

VI.B A l'aide de la question VI.A, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

VI.C Dans la suite de cette partie, on admettra que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{si } x = \lambda$$

VI.C.1 Soit $x \geq 0$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k\leq \lfloor nx\rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

VI.C.2 En déduire que $\mathcal{L} \ :\ f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est injective sur l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, continues sur $\mathbb{R}_+$, et nulles en dehors d'un segment.

Correction :

VI.A

VI.A.0 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, montrons que $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. On a $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le SCE $(X=i)_{i\in\mathbb{N}}$ on a : $\mathbb{P}(X+Y=k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\left((X=i)\cap(Y=k-i)\right)$, par indépendance de X et Y on a : $\mathbb{P}(X+Y=k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda}{i!}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu}}{k!}(\lambda+\mu)^k$. Ce qui montre bien que $\boxed{X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)}$.

VI.A.1 Montrons par récurrence sur n que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$:
Initialisation : Immédiat pour $n=1$ (le résultat préliminaire montre aussi directement pour $n=2$.
Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 1$, comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, on peut appliquer le résultat préliminaire pour montrer que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda+\lambda = (n+1)\lambda$. Ce qui termine l'hérédité.
Ainsi par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)}$.

VI.A.2 D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en notant μ et σ l'espérance et l'écart-type de ces variables, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-\mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. En utilisant $\mu = \sigma^2 = \lambda$ on a $\mathbb{P}\left(|S_n-\lambda| \geq n\varepsilon\right) \leq \dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$ et donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathbb{P}(|S_n-n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}}$.

VI.A.3 Si $a > b+c$ et $c \geq 0$ alors $|a-b| \geq a-b > c$. On en déduit que : $\boxed{(S_n > n(\lambda+\varepsilon)) \subset (|S_n-n\lambda| \geq n\varepsilon)}$. De même si $a \leq b-c$ avec $c \geq 0$ alors $a-b \leq -c \leq 0$ et donc $|a-b| \geq c \geq 0$. Ainsi $\boxed{(S_n \leq n(\lambda-\varepsilon)) \subset (|S_n-n\lambda| \geq n\varepsilon)}$.

VI.A.4 Séparons en deux cas :
Cas 1 : $x \in [0,\lambda[$. Posons $\varepsilon = \frac{\lambda-x}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ et $x < \lambda-\varepsilon$. On en déduit que $(S_n \leq nx) \subset (S_n \leq n(\lambda-\varepsilon))$ et donc : $0 \leq \mathbb{P}(S_n \leq nx) \leq \mathbb{P}(S_n \leq n(\lambda-\varepsilon)) \leq \mathbb{P}(|S_n-n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$. Ainsi (par théorème d'encadrement) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(S_n \leq nx) = 0$
Cas 2 : $x > \lambda$. Posons $\varepsilon = \frac{x-\lambda}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ et $\lambda+\varepsilon < x$. On en déduit que $(S_n > nx) \subset (S_n > n(\lambda-\varepsilon))$ et donc : $0 \leq \mathbb{P}(S_n > nx) \leq \mathbb{P}(S_n > n(\lambda-\varepsilon)) \leq \mathbb{P}(|S_n-n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$. Ainsi (par théorème d'encadrement) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(S_n > nx) = 0$ et donc $\mathbb{P}(S_n \leq nx) = 1-\mathbb{P}(S_n > nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

On a bien montré : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(S_n \leq nx) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}}$.

VI.B S_n étant à valeurs entières positives et suivant une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$, $\mathbb{P}(S_n \leq nx) = \displaystyle\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$. La question précédente donne : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}}$.

VI.C

VI.C.1 Avec la formule donné pour $(\mathcal{L}(f))^{(k)}$ dans le préambule de la partie VI, on a : $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}(-1)^k\frac{n^k}{k!}(\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\int_0^{+\infty}\frac{(nt)^k}{k!}f(t)e^{-nt}\ \mathrm{d}t =$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\frac{(nt)^k}{k!}f(t)e^{-nt}\right)\,\mathrm{d}t$. Posons $F_n\ :\ t\mapsto\displaystyle\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\frac{(nt)^k}{k!}f(t)e^{-nt}$, la question précédente (et le résultat admis) disent que (F_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction F définie par $F(t)=f(t)$ pour $t\in[0,x[$, $F(t)=f(x)/2$ pour $t=x$ et $F(t)=0$ pour $t\in]x,+\infty[$. Appliquons le théorème de convergence dominée :

— (F_n) converge simplement vers F sur $\mathbb{R}_+$.
— Tous les F_n et F sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
— Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}_+$ on a (croissance de la suite des sommes partielles d'une SATP pour l'inégalité) : $|F_n(t)|\leq|f(t)|\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nt)^k}{k!}e^{-nt}=|f(t)|$, la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (f est nulle et continue en dehors d'un segment donc l'intégrale n'est pas généralisée).

Ainsi le TCD s'applique et on a : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}(-1)^k\frac{n^k}{k!}(\mathcal{L}(f))^{(k)}(n)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$.

VI.C.2 $\mathcal{L}$ est linéaire et il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit donc f une fonction continue nulle hors d'un segment et telle que $\mathcal{L}(f)=0$. La question précédente montre que pour tout x, $\displaystyle\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y=0$. Ainsi une primitive de f est nulle sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc que f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{L}\text{ est injective sur l'ensemble des fonctions considérées}}$.

Problème 2
Matrices de Hurwitz

Problème 2 : Mines-Pont PSI 2022, maths 2 (sans la partie IV)

Notations

— n désigne un entier naturel non nul.
— $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
— $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
— $\mathbb{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
— $\mathrm{Re}^-=\{z\in\mathbb{C}\,/\,\mathrm{Re}(z)<0\}$.
— On désigne par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée :

$$\langle(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i,$$
$$\|(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

— On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
— Pour $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on notera son conjugué $\bar{X}=(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})$, sa partie réelle $\mathrm{Re}(X)=\dfrac{X+\bar{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(X)=\dfrac{X-\bar{X}}{2\mathrm{i}}$.
— Si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) canoniquement associé à M est :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n&\longrightarrow&\mathbb{R}^n\\X&\longmapsto&MX\end{array}\quad\left(\text{respectivement}\ \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^n&\longrightarrow&\mathbb{C}^n\\X&\longmapsto&MX\end{array}\right).$$

Rappels

1. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

   Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
2. Soient R et S deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. le polynôme R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $S = QR$. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

— La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
— La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
— La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
— Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Partie I – Matrices semi-simples

Définition 1 : Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite semi-simple si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Définition 2 : Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite presque diagonale s'il existe :

i) deux entiers naturels p et q ;
ii) q réels $a_1, a_2, \dots, a_q$;
iii) q réels non nuls $b_1, b_2, \dots, b_q$;
iv) une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où : $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M. De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q2. Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B, introduire les vecteurs $W_1 = Re(V)$ et $W_2 = Im(V)$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On suppose dans la question Q3 seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + \mathrm{i}b$ et $\bar{\mu} = a - \mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^\star$.

Q3. Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Q4. Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :
i) M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

Q5. Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

Q6. Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbb{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice presque diagonale.

Correction :

Q1. On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3)+1 = X^2-4X+4 = (X-2)^2$. Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P2I_2P^{-1} = 2I_2$, ce qui n'est pas le cas, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Ainsi $\boxed{A \text{ n'est pas semi-simple}}$.

Q2. On a $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -2 \\ 5 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)(X-1)+10 = X^2-4X+13 = (X-2)^2+9 = (X-2-3\mathrm{i})(X-2+3\mathrm{i})$.
Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{2+3\mathrm{i}, 2-3\mathrm{i}\}$, comme χ_B est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ainsi $\boxed{B \text{ est semi-simple}}$.
On a $B-(2+3\mathrm{i})I_2 = \begin{pmatrix} 1-3\mathrm{i} & 2 \\ -5 & -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$. On remarque que $2C_1 - (1-3\mathrm{i})C_2 = 0$, ainsi $V = (2, -1+3\mathrm{i})$ est un vecteur propre de B de valeur propre $2+3\mathrm{i}$. Posons $W_1 = (2,-1)$ et $W_2 = (0,3)$, ainsi (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus $BW_1 = (4,-11) = 2W_1 - 3W_2$ et $BW_2 = (6,3) = 3W_1 + 2W_2$. Ainsi, si on note $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, on a : $\boxed{B = Q\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1} \text{ (ie } a=1 \text{ et } b=3)}$.

Q3. La matrice M est diagonalisable (car deux valeurs propres distinctes puisque $b \neq 0$), donc $\boxed{M \text{ est semi-simple}}$. Ainsi il existe $V \neq 0$ vecteur propre de M de valeur propre μ, ainsi $MV = \mu V$, en conjuguant l'égalité et en utilisant $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on en déduit que $M\overline{V} = \overline{\mu}\overline{V}$, ainsi $\overline{V}$ est un vecteur propre de M de valeur propre $\overline{\mu}$. Notons $W_1 = \mathrm{Re}(V)$ et $W_2 = \mathrm{Im}(V)$, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'égalité $MV = \mu V$ (ie dans $M(W_1 + \mathrm{i}W_2) = (a+\mathrm{i}b)(W_1+\mathrm{i}W_2)$), on trouve $MW_1 = aW_1 - bW_2$ et $MW_2 = bW_1 + aW_2$. Comme $V = W_1 + \mathrm{i}W_2$ et $\overline{V} = W_1 - \mathrm{i}W_2$, on a $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(W_1, W_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(V, \overline{V})$, ainsi (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{C}^2$, donc une famille libre, comme ces vecteurs sont réels, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base (W_1, W_2), on a : $M = Q\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}Q^{-1}$, et donc $\boxed{M \text{ est semblable, dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{, à } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}$.

Q4. On a, par définition, que : i) $\Rightarrow$ M semi-simple. On vient de montrer à la question précédente que : ii) $\Rightarrow$ M semi-simple.
Réciproquement, supposons que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semi-simple, notons Δ le discriminant de χ_M, et séparons en trois cas :
Cas 1 : si $\Delta > 0$ alors χ_M est scindé-simple dans $\mathbb{R}[X]$ et donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et ainsi i) est vérifié
Cas 2 : si $\Delta < 0$ alors χ_M est scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ et ses racines sont deux complexes conjugués $a \pm \mathrm{i}b$ avec $b \neq 0$, ainsi ii) est vérifié
Cas 3 : si $\Delta = 0$ alors χM possède une unique racine $a \in \mathbb{R}$, comme M est semi-simple alors il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $M = PaI_2P^{-1} = aI_2$, ainsi M est diagonale donc i) est vérifié.
$\boxed{\text{L'équivalence est ainsi démontrée}}$.

Q5. Notons M une matrice presque diagonale semblable à N, et reprenons les notations de la définition : $M = \mathrm{diag}(D, M(a_1,b_1), \ldots, M(a_q,b_q))$ (D matrice diagonale de taille p, $(a_1, \ldots, a_q) \in \mathbb{R}^n$, et $(b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}^\star)^n$).
Pour $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$, $\chi_{M(a,b)} = \begin{pmatrix} X-a & -b \\ b & X-a \end{pmatrix} = (X-a)^2 + b^2$, ainsi $\chi_{M(a,b)}$ possède deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nul, ainsi d'après Q3, $M(a,b)$ est semi-simple.
Pour $i \in [\![1, q]\!]$, comme $M(a_i, b_i)$ est semi-simple il existe $P_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $D_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonale telles que $M(a_i, b_i) = P_iD_iP_i^{-1}$.
Posons la matrice par bloc $P = \mathrm{diag}(I_p, P_1, \ldots, P_q)$, cette matrice est inversible et $P^{-1} = \mathrm{diag}(I_p, P_1^{-1}, \ldots, P_q^{-1})$, de plus on a $M = P\mathrm{diag}(D, D_1, \ldots, D_p)P^{-1}$, ainsi M est semblable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) à une matrice diagonale, donc N aussi. Ainsi $\boxed{N \text{ est semi-simple}}$.

Q6. Le polynômes χ_N est unitaire de degré n, notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ ses racines réelles (éventuellement il n'y en a aucune), comme χ_N est à coefficients réels, si μ est racine alors $\overline{\mu}$ l'est aussi, en notant $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ les racines complexes de χ_N de partie imaginaire positive, on alors $(\overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_q})$ sont aussi racines. Ainsi

$\chi_n = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)\prod_{k=1}^{q}(X-\mu_k)(X-\overline{\mu_k})$. On a $n = p+2q$, notons alors, pour $k \in [\![1,q]\!]$, $\mu_k = a_k + \mathrm{i}b_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ et $b_k \in \mathbb{R}^\star$ (car μ_k racine complexe non réelle).
On suppose N semi-simple, ainsi il existe une base $(U_1,\dots,U_p,V_1,\overline{V_1},\dots,V_q,\overline{V_q})$ de $\mathbb{C}^n$ où les U_k sont des vecteurs propres (qu'on choisit à coefficient réels) de valeurs propre λ_k et où les V_k sont des vecteurs propres de valeurs propres μ_k.
Posons alors, pour tout k, $W_{1,k} = \mathrm{Re}(V_k)$ et $W_{2,k} = \mathrm{Im}(V_k)$, ainsi $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(V_k,\overline{V_k}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(W_{1,k},W_{2,k})$ (cf Q3). Ainsi $(U_1,\dots,U_p,W_{1,1},W_{2,1},\dots,W_{1,q},W_{2,q})$ est une base de $\mathbb{C}^n$, donc est libre et comme les vecteurs qui la constitue sont a coefficients dans $\mathbb{R}$, c'est aussi une base de $\mathbb{R}^n$.

Notons $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(U_1,\dots,U_p)$ et pour tout k, $G_k = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(W_{1,k},W_{2,k})$, ainsi $\mathbb{R}^n = F \oplus \bigoplus_{k=1}^{q} G_k$. Le sous-espace vectoriel F est stable par N (car engendré par des vecteurs propres), et il en va de même pour tous les G_k en effet :
Si $X \in G_k$ il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X = \alpha W_{1,k} + \beta W_{2,k} = \frac{\alpha}{2}(V_k + \overline{V_k}) + \frac{\beta}{2\mathrm{i}}(V_k - \overline{V_k})$, ainsi $NX = \frac{\alpha}{2}(\mu_k V_k + \overline{\mu_k}\overline{V_k}) + \frac{\beta}{2\mathrm{i}}(\mu_k V_k - \overline{\mu_k}\overline{V_k})$, or $\frac{1}{2}(\mu_k V_k + \overline{\mu_k}\overline{V_k}) = \mathrm{Re}(\mu_k V_k) = a_k W_{1,k} - b_k W_{2,k}$ et $\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mu_k V_k - \overline{\mu_k}\overline{V_k}) = \mathrm{Im}(\mu_k V_k) = a_k W_{2,k} + b_k W_{1,k}$, ce qui montre bien que $NX \in G_k$.
Le calcul précédent (qui est le même qu'en Q3) donne aussi $NW_{1,k} = a_k W_{1,k} - b_k W_{2,k}$ et $NW_{2,k} = b_k W_{1,k} + a_k W_{2,k}$.
Il ne reste plus qu'à poser P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers la base $(U_1,\dots,U_p,W_{1,1},W_{2,1},\dots,W_{1,q},W_{2,q})$, et le calcul précédent donne $N = P\mathrm{diag}(D, M(a_1,b_1),\dots,M(a_q,b_q))P^{-1}$. Ce qui montre bien que $\boxed{\text{si } N \text{ est semi-simple alors } N \text{ est semblable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ à une matrice presque diagonale}}$.

Partie II – Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E.
On suppose dans les questions Q7, Q8 et Q9 que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1,v_2,\dots,v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0_E\}$ et de E.

Q7. Démontrer qu'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F est la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

On note alors :

$$\mathcal{A} = \{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subseteq H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\}$$

et :

$$\mathcal{L} = \{p \in \mathbb{N}^\star \mid \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\}.$$

Q8. Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r.

Q9. Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E, stable par u.

Q10. On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E, stable par u. Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n-1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u.

Correction :

Q7. Si tous les v_k étaient dans F on aurait $F = E$ puisque $(v_1,\dots,v_n)$ est une base de E, $\boxed{\text{il existe donc } k \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } v_k \notin F}$. De plus, soit $x \in F \cap \mathrm{Vect}(v_k)$, alors $x \in F$ et il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $x = \alpha v_k$ alors $\alpha = 0$ (sinon $v_k = \dfrac{1}{\alpha}x \in F$: absurde), donc $x = 0$ ce qui montre que $F \cap \mathrm{Vect}(v_k) = \{0_E\}$ et donc que $\boxed{F \text{ et } \mathrm{Vect}(v_k) \text{ sont en somme directe}}$.

Q8. Le sous-espace $\mathrm{Vect}(v_k)$ est stable par u (car engendré par un vecteur propre) et son intersection avec F est $\{0_E\}$, ainsi $\mathrm{Vect}(v_k)$ est dans $\mathcal{A}$, ainsi $1 = \dim(\mathrm{Vect}(v_k)) \in \mathcal{L}$, ainsi $\mathcal{L}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^\star$ et elle est majorée par n (car tous les sous-espaces vectoriels de E sont de dimension plus petite que n), ainsi $\boxed{\mathcal{L} \text{ possède un plus grand élément noté } r}$.

Q9. Comme $r \in \mathcal{L}$, il existe $G \in \mathcal{A}$ tel que $\dim(G) = r$, par définition de $\mathcal{A}$ on a G et F en somme directe, supposons qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et $v_k \notin G$, ainsi $\mathrm{Vect}(v_k)$ et G sont en somme directe, notons $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(v_k)$, on a G' stable par u (comme somme directe de sev qui le sont), de plus $G' \cap F = \{0_F\}$, ainsi G' est un élément de $\mathcal{A}$ de dimension $r+1$, ce qui contredit la maximalité de r.
Ainsi tous les v_k sont dans F ou dans G, ce qui montre que $F + G = E$, ce qui montre bien que $\boxed{F \text{ admet un supplémentaire } G \text{ dans } E\text{, stable par } u}$.
Remarque : on peut aussi poser $H = F + G$ et si $E \neq H$, utiliser Q7.

Q10. Notons $H = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$, par hypothèse H possède un supplémentaire G dans E stable par u, supposons que u n'est pas diagonalisable, ainsi $H \neq E$ et donc $\dim(H) \leq n-1$, ce qui montre que $G \neq \{0_E\}$. Comme G est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_G, induit par u sur G, son polynôme caractéristique est de degré $\dim(G) \geq 1$, donc possède des racines, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de u_G, il existe donc $x \in G$ tel que $x \neq 0$ et $u_G(x) = \lambda x$, ainsi $u(x) = \lambda x$ et donc $x \in H$, or $H \cap G = \{0_E\}$, ainsi $x = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $\boxed{u \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
On a ainsi démontré (en Q9 et Q10) la caractérisation suivante :
$\boxed{u \text{ est diagonalisable si et seulement si tous les sev de } E \text{ possèdent des supplémentaires stables par } u}$.

Partie III – Polynômes de Hurwitz

Définition 3 : Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit polynôme de Hurwitz si ses racines dans $\mathbb{C}$ appartiennent à :

$$\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) < 0\}.$$

Définition 4 : Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit à coefficients strictement positifs s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k > 0$.

Q11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.

Q12. Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

Q13. Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbb{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2} (X - z_k - z_\ell)\,.$$

Q14. On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?

Q15. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

Q16. Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

Correction :

Q11. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à coefficients strictement positifs et α une racine de P. Si on avait $\alpha \geq 0$, on aurait $P(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k \alpha^k \geq a_0 > 0$ (puisque $\alpha \geq 0$ et tous les a_k sont strictement positifs), ce qui contredit $P(\alpha) = 0$, ainsi $\boxed{\alpha < 0}$.

Q12. Soit P un polynôme de Hurwitz, et soit R un diviseur de P, il existe donc Q tel que $P = QR$. Soit α une racine de R, alors α est aussi racine de P et donc, puisque P est un polynôme de Hurwitz, on a $\alpha \in \mathrm{Re}^-$. Ce qui montre bien $\boxed{\text{qu'un diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz}}$.

Q13. Un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ est soit de degré 1, soit de degré 2 (sans racine réelle), traitons les deux cas.

Cas 1 : Soit $P = aX + b$ un polynôme de Hurwitz de degré 1 avec $a \geq 0$, ainsi $a > 0$ et $\frac{-b}{a}$ est racine de P, ainsi $\frac{-b}{a} < 0$ et donc $b > 0$, ce qui montre bien que $\boxed{\text{tous les coefficients de } P \text{ sont strictement positifs}}$.

Cas 2 : Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de Hurwitz de degré 2 avec $a \geq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, on a donc $a > 0$. Les racines de P sont $\frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, comme P est un polynôme de Hurwitz on a donc $\frac{-b}{2a} < 0$ et ainsi $b > 0$. Or $b^2 - 4ac < 0$ ainsi $c > \frac{b^2}{4a}$ (puisque $a > 0$) et donc $c > 0$, ce qui montre bien que $\boxed{\text{tous les coefficients de } P \text{ sont strictement positifs}}$.

Alternative : on peut aussi utiliser les relations coefficients/racines.

On a bien montré le résultat dans tous les cas.

Q14. On suppose $P = (X - z_1)(X - z_2) \in \mathbb{R}[X]$ et que les coefficients de $Q = (X - 2z_1)(X - 2z_2)(X - z_1 - z_2)^2$ sont strictement positifs, en particulier son coefficient constant (produit des racines) : $4z_1z_2(z_1 + z_2)^2 > 0$ et son coefficient devant X^3 (opposé de la somme des racines) : $-4(z_1 + z_2) > 0$. Comme P est à coefficients réels, on a deux possibilités :

Cas 1 : z_1 et z_2 sont réels, la stricte positivité des coefficients de Q donne $z_1z_2 > 0$ et $z_1 + z_2 < 0$, ainsi les deux racines de P sont de même signe et strictement négatives, ainsi P est un polynôme de Hurwitz.

Cas 2 : z_1 et z_2 sont complexes (non réelle) et conjuguées, ainsi $z_2 = \overline{z_1}$. Comme $-4(z_1 + z_2) > 0$ on a $-8\mathrm{Re}(z_1) > 0$, ainsi $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) < 0$ et donc P est un polynôme de Hurwitz.

Dans tous les cas $\boxed{P \text{ est un polynôme de Hurwitz}}$.

Q15. Notons $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k > 0$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d'} b_l X^l$ où, pour tout $l \in [\![0, d]\!]$, $b_l > 0$.

On a $AB = \displaystyle\sum_{k=0}^{d+d'} c_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d + d']\!]$, on a $c_k = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$ (où on a posé $a_l = 0$ si $l > d$ et $b_l = 0$ si $l > d'$), on a clairement $c_k \geq 0$, de plus si $k \in [\![0, d]\!]$ alors $a_k b_o > 0$ apparait dans la somme donc $c_k > 0$, et si $k \in [\![d, d + d']\!]$ alors $a_d b_{k-d} > 0$ (puisque $k - d \in [\![0, d']\!]$) apparait dans cette somme et donc $c_k > 0$.

Ainsi $\boxed{\text{les coefficients du produit } AB \text{ sont également strictement positifs}}$.

Q16. On suppose $P(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ et $Q(X) = \displaystyle\prod_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2} (X - z_k - z_\ell)$ à coefficients réels. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ ses racines réelles (éventuellement il n'y en a aucune), notons $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ les racines complexes de P de partie imaginaire positive, on alors $(\overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_q})$ sont aussi racines. Ainsi $P(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k) \prod_{k=1}^{q}(X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k})$ et on a $n = p + 2q$.

On peut remarquer que, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, on a $\mu_k + \overline{\mu_k} = 2\mathrm{Re}(\mu_k)$ est racine de Q.

— Sens réciproque : Supposons P et Q à coefficients strictement positifs. Ainsi (d'après Q11) les racines réelles de P et de Q sont strictement négatives, ce qui donne pour P que les λ_i sont strictement négatifs, et pour Q que les $2\mathrm{Re}(\mu_k)$ sont strictement négatifs. Ce qui montre bien que toutes les racines de P sont dans Re^-, ainsi $\boxed{P \text{ est un polynôme de Hurwitz}}$.

— Sens direct : Supposons que P est un polynôme de Hurwitz. Ainsi pour tout i, on a $\lambda_i < 0$ et pour tout k, on a $\mathrm{Re}(\mu_k) < 0$, en particulier $\mu_k + \overline{\mu_k} < 0$. Les polynômes $X - \lambda_i$ sont donc à coefficient strictement positifs, et il en va de même pour les $(X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k}) = X^2 - (\mu_k + \overline{\mu_k})X + \mu_k\overline{\mu_k}$ (car $\mu_k\overline{\mu_k} = |\mu_k|^2 > 0$). Ainsi, en utilisant Q15, on en déduit que P est à coefficients strictement positifs.
On procède de même avec Q (ses racines, ie les $z_k - z_l$, sont aussi dans Re^-). Ainsi $\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont à coefficients strictement positifs}}$.

Ainsi, $\boxed{\text{on a bien montré l'équivalence demandée}}$.