Concours Blanc « CCINP - E3A » Pc-Psi

Composition de Mathématiques
Durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Aucun document autorisé ; calculatrice et tout matériel électronique interdits

Durées *indicatives* :

Exercice 1

1° On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\frac{1}{\gamma}$.

2° Soit (a_n) et b_n définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + b_n \end{array} \right.$.

2°.1 Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

2°.2 Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

$$(1)\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}; \qquad (2)\frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}; \qquad (3)\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$$

2°.3 Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.

2°.4 Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

3° On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une unique matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $V_{n+1} = MV_n$.

4° Justifier que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

5° Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n\mathrm{I}_2 + b_nM$.

6° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$.

Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M, c'est-à-dire montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que $C_n = \alpha_n\mathrm{I}_2 + \beta_nM$ et tels que $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ convergent. On notera alors α et β les limites de ces 2 suites et $C = \alpha\mathrm{I}_2 + \beta M$.

7° Montrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

On admettra que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} PM_nP^{-1} = P\left(\lim_{n\to+\infty} M_n\right)P^{-1}$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1° Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2° Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

3° Étudier alors sa convergence uniforme sur J.

4° Déterminer $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5° Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5°.1 Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5°.2 Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Problème 1 : La fonction dilogarithme

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.

On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I – Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]0, +\infty[\times]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times]-\infty, 1], \quad f(t, x) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

Q1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

Q2. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q3. Soit $x \in]-\infty, 1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t, x)$ et $t \mapsto f(t, 1)$, montrer que $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t, x) \mathrm{d}t.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

Q4. Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty, 1]$.

Partie II – Développement en série entière

Dans cette partie, on considère un nombre réel $x \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad s_n(t) = t\mathrm{e}^{-(n+1)t} x^n.$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t) \mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t) \mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q6. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} s_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x)$$

Q7. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $L(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

Q8. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L\left(x^2\right)$.

Q9. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Partie III – Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x).$$

Q10. On admet que la fonction L est dérivable et, pour $x \in]-1,1[$, qu'on a : $L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$. Montrer que l'on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$.

Q11. Montrer que la fonction h est constante sur $]0,1[$.

Q12. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0,1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1} \mathsf{d}t$.

Problème 2 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \mathsf{d}t.$$

Q1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Q2. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathsf{d}t = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} \mathsf{d}t.$$

Q4. Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

Q7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in [\![0,n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

Q8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

Q9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10. Justifier que P_k est de degré k.

Q11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q12. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathsf{d}t$.

Q13. En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

Q14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathsf{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

Q15. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q16. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.

Q17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathsf{d}t \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Fin de l'énoncé