Correction du Concours Blanc « ccinp - e3a » Pc-Psi

Exercice 1 : e3a pc 2021, exercice 3

Correction :

1° Les racines de x^2-x-1 sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$, comme $\sqrt{5}>\sqrt{4}=2$, la première est négative et la seconde est plus grande que 1, ainsi $\gamma=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on a bien $\boxed{\gamma>1}$. De plus $\frac{-1}{\gamma}=\frac{-2}{1+\sqrt{5}}=\frac{-2(1-\sqrt{5})}{1-5}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ainsi $\boxed{\text{l'autre racine vaut bien } \frac{-1}{\gamma}}$.

Alternative : Le discriminant vaut $\sqrt{5}$, ainsi le trinômes possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les relations coefficients/racines donnent $r_1r_2=-1$ (elles sont donc de signe opposé) et $r_1+r_2=1$, en notant γ la racine positive on a avec la première relation que l'autre racine vaut $\frac{-1}{\gamma}$ et avec la deuxième relation que $\gamma-\frac{1}{\gamma}=1$ et donc $\gamma=1+\frac{1}{\gamma}>1$.

2° 2°.1 Pour $n\geq 1$, on a $a_n=b_{n-1}$, comme $b_{n+1}=a_n+b_n$, on a bien $\boxed{b_{n+1}=b_n+b_{n-1}}$.

2°.2 Ainsi (b_n) est une SRL_2 d'équation caractéristique $x^2-x-1=0$, ainsi (b_n) est combinaison linéaire de γ^n et de $\frac{(-1)^n}{\gamma^n}$, ce qui exclus (2). La valeur $b_0=0$ exclus (1), ainsi $\boxed{\text{l'expression de } (b_n) \text{ est donnée par (3)}}$.

2°.3 Pour $n\geq 1$, $a_n=b_{n-1}=\frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}}+\frac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}}$. De plus $b_1=a_0+b_0$, ainsi $a_0=1$, on a aussi : $\frac{\gamma^{-1}}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\gamma^{-1}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma+\frac{1}{\gamma})=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$. La formule est donc aussi vérifiée pour $n=0$, on a donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}}+\frac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}}}$.

2°.4 Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $a_n+b_n\gamma=\frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}}+\frac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}}+\left(\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}}+\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}\right)\gamma=\frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}}+\frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}}=\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)$, d'après le calcul de la question précédente : $\gamma+\frac{1}{\gamma}=\sqrt{5}$, ainsi : $\boxed{a_n+b_n\gamma=\gamma^n}$.

Alternative : La montrer par récurrence sur n (vous aurez sans doute besoin d'utiliser que $\gamma^2=1+\gamma$, ce qui découle de 1°).

3° Pour $n\in\mathbb{N}$, on a : $\boxed{V_{n+1}=MV_n \text{ pour } M=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}}$.

4° Déterminons le polynôme caractéristique de M : $\chi_M(X)=\begin{vmatrix}X&-1\\-1&X-1\end{vmatrix}=X(X-1)-1=X^2-X-1=(X-\gamma)(X+\frac{1}{\gamma})$, comme il est scindé à racines simples ($\frac{-1}{\gamma}<0<1<\gamma$) on a que $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$. On a : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in E_\gamma(M)\iff(M-\gamma\mathrm{I}_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\iff\left\{\begin{array}{rcl}-\gamma x+y&=&0\\x+(1-\gamma)y&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}-\gamma x+y&=&0\\(1+\gamma-\gamma^2)y&=&0\end{array}\right.$ $(L_2\leftarrow\gamma L_2+L_1)$, comme $1+\gamma-\gamma^2=0$, on en déduit ainsi $\boxed{E_\gamma(M)=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\\gamma\end{pmatrix})}$. De même $\boxed{E_{-1/\gamma}(M)=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}-\gamma\\1\end{pmatrix})}$.

5° Tout d'abord on remarque que $M^2=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}=\mathrm{I}_2+M$.

Montrons, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, que $M^n=a_n\mathrm{I}_2+b_nM$.

— Initialisation : On a $a_0=1$ et $b_0=1$, ainsi $a_0\mathbf{I}_2+b_0M=I_2=M^0$, la propriété est donc initialisée à $n=0$.

— Hérédité : On suppose la propriété pour un certain $n\in\mathbb{N}$, ie on suppose $M^n=a_n\mathrm{I}_2+b_nM$.
On a $M^{n+1}=M^nM=(a_n\mathrm{I}_2+b_nM)M=a_nM+b_nM^2=a_nM+b_n(\mathrm{I}_2+M)=b_n\mathrm{I}_2+(a_n+b_n)M=a_{n+1}\mathrm{I}_2+b_{n+1}M$. Ainsi la propriété est héréditaire.

On a bien montré : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ M^n=a_n\mathrm{I}_2+b_nM}$

6° Le plus simple serait la méthode de la question suivante, mais on va se laisser guider par les questions et utiliser la question précédente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\right) \mathrm{I}_2 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!}\right) M$. Il ne reste plus qu'a injecter les expressions des suites (a_n) et (b_n).

On a : $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} = \frac{1}{\gamma\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma^k}{k!} + \frac{\gamma}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1/\gamma)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\gamma\sqrt{5}} + \frac{\gamma \mathrm{e}^{-1/\gamma}}{\sqrt{5}}$.

De même : $\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma^k}{k!} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1/\gamma)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\sqrt{5}} - \frac{\mathrm{e}^{-1/\gamma}}{\sqrt{5}}$.

Ce qui montre que : $\boxed{(C_n) \text{ converge vers } (\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\gamma\sqrt{5}} + \frac{\gamma\mathrm{e}^{-1/\gamma}}{\sqrt{5}})\mathrm{I}_2 + (\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\sqrt{5}} - \frac{\mathrm{e}^{-1/\gamma}}{\sqrt{5}})M}$.

7° On utilise la question 4°, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -1/\gamma \end{pmatrix}$ ainsi on a $M = PDP^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a donc $C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} = P\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma^k}{k!}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1/\gamma)^k}{k!}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)P^{-1}$, en faisant $n \to +\infty$ on a $C = P\Delta P^{-1}$, ainsi $\boxed{C \text{ est bien semblable à } \Delta}$.

Exercice 2 : e3a PSI 2020, exercice 1

Correction :

1° Soit $x \geq 1$ fixé, la série $\sum f_n(x)$ est alternée, de plus la suite $(|f_n(x)|)$ est décroissante et tend vers 0, ainsi $\sum f_n(x)$ relève du théorème spécial des séries alternées, d'où la la convergence de $\sum f_n(x)$. Ainsi $\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement sur } J}$.

2° Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante sur J et tend vers 0 en $+\infty$, ainsi $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = \frac{1}{\sqrt{1+n}}$, ainsi $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge. On a bien montré que $\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } J}$.

3° Soit $x \geq 1$ fixé, le TSA utilisé en 1° donne aussi, pour $n \in \mathbb{N}$, que le reste d'ordre n , $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, vérifie $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2+n}}$, ainsi $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2+n}}$, ce qui montre que $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi $\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformément sur } J}$.

4° On a $f_0(x) = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et, pour $n \geq 1$, on a $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de plus on a la convergence uniforme de la série sur J, ainsi, d'après le théorème de la double limite on a $\boxed{\ell = 1}$.

5° 5°.1 La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée qui relève du TSA $((\frac{1}{\sqrt{n}})$ est bien décroissante et tend vers 0), $\boxed{\text{elle est donc convergente}}$.

5°.2 Soit $x \in J$, alors $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}\sqrt{\frac{1}{nx}+1}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc : $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{-1/2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}\left(1 - \frac{1}{2nx} + \frac{1}{x} \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{x^{3/2}}\left(-\frac{1}{2n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$.

Or, si $w_n = -\frac{1}{2n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ alors $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{3/2}} < 0$ donc $\sum w_n$ converge. On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Toutes les séries étant convergentes, on peut en déduire que : $\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{A}{x^{3/2}}$. Et ainsi, lorsque x tend vers l'infini : $\boxed{\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{O}(\frac{1}{x^{3/2}})}$.

Alternative : Soit $x \geq 1$, on a : $\varphi(x) - \left(1 + \dfrac{a}{\sqrt{x}}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$.

Pour $n \geq 1$, on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| = \left|\frac{\sqrt{nx} - \sqrt{1+nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}}\right| = \left|\frac{nx - (1+nx)}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{nx}}$$

ainsi $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}} - \dfrac{1}{\sqrt{nx}}\right| \leq \dfrac{1}{2x\sqrt{x}n\sqrt{n}}$, or $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2}$), ainsi on a : $\varphi(x) - \left(1 + \dfrac{a}{\sqrt{x}}\right) \leq \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Ce qui montre bien que $\boxed{\varphi(x) = 1 + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)}$.

Problème 1 : CCINP PC 2023, exercice 2

Partie I – Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Correction :

Q1. Soit $t > 0$ et $x \leq 1$, on a $\mathrm{e}^t > 1$, ainsi $\mathrm{e}^t - x > 0$, ce qui montre que $\boxed{f \text{ est correctement définie}}$ (et est positive).

Q2. La fonction $t \mapsto f(t,1) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et y est positive, ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en 0 et $+\infty$.

en 0 : $f(t,1) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$, ainsi la fonction est prolongeable par continuité en 0, ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(t,1)\mathrm{d}t$ converge.

en $+\infty$: $t^2 f(t,1) = \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (par cc), ainsi $f(t,1) = \underset{t \to +\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge il en va de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,1)\mathrm{d}t$.

Ce qui montre bien $\boxed{\text{l'intégrabilité de } t \mapsto f(t,1) \text{ sur }]0, +\infty[}$.

Q3. Pour $t > 0$ et $x \leq 1$, on a $\mathrm{e}^t - x \geq \mathrm{e}^t - 1 > 0$, ainsi $0 \leq f(t,x) < f(t,1)$, ce qui montre, avec la question précédente, que $\boxed{t \mapsto f(t,x) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[}$.

Q4. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètres à $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$, on a :

(i) À $t > 0$ fixé, $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur $]-\infty, 1]$

(ii) À $x \leq 1$ fixé, $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

(iii) Hypothèse de domination. Pour tout $x \leq 1$ et $t > 0$, on a $|f(t,x)| \leq f(t,1) = \varphi(t)$ (d'après **Q3**) et φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après **Q4**).

Ainsi $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$ est continue sur $]-\infty, 1]$, ainsi $\boxed{L \text{ est continue sur }]-\infty, 1]}$.

Partie II – Développement en série entière

Correction :

Q5. La fonction s_n est continue sur $]0, +\infty[$, ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en 0 et $+\infty$.

en 0 : $s_n(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, ainsi l'intégrale est faussement généralisée en 0, donc $\displaystyle\int_0^1 s_n(t)\mathrm{d}t$ converge

en $+\infty$: $t^2 s_n(t) = t^3 \mathrm{e}^{-(n+1)t} x^n \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (par cc puisque $n + 1 > 0$), ainsi $s_n(t) = \underset{t \to +\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge il en va de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale considérée est convergente}}$.
Procédons au calcul par IPP, pour cela on pose, pour $t>0$, $u(t)=tx^n$ et $v(t)=\frac{-1}{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, pour $t>0$ on a $u'(t)=x^n$ et $v'(t)=\mathrm{e}^{-(n+1)t}$. De plus $u(t)v(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$ et $u(t)v(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$ (par cc), ainsi le crochet converge. On a donc, par IPP, que $\displaystyle\int_0^{+\infty}s_n(t)\mathsf{d}t=\left[tx^n\frac{-1}{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}x^n\frac{-1}{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathsf{d}t=\frac{x^n}{n+1}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathsf{d}t=\frac{x^n}{n+1}\left[\frac{-\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{+\infty}=\frac{x^n}{(n+1)^2}$. On a bien montré : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}s_n(t)\mathsf{d}t=\frac{x^n}{(n+1)^2}}$.

Q6. Pour $t>0$ et $n\in\mathbb{N}$, $s_n(t)=t\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-t}x)^n$, comme $t>0$, on a $\mathrm{e}^{-t}\in]0,1[$, comme $x\in[-1,1]$, on a $\mathrm{e}^{-t}x\in]-1,1[$, ainsi la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(\mathrm{e}^{-t}x)^n$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}x}$. Ce qui montre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}s_n(t)=t\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}x}=\frac{t}{\mathrm{e}^t-x}$, on a bien montré que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}s_n(t)=f(t,x)}$.

Q7. Pour $n>0$, $\left|\frac{x^n}{n2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, comme $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\boxed{\sum\frac{x^n}{n^2}\text{ converge}}$.
Appliquons le TITT à la série de fonction $\sum xs_n(t)$, on a :

(i) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto xs_n(t)$ est intégrable d'après **Q5**

(ii) La série de fonction $\sum xs_n$ converge simplement vers $t\mapsto xf(t,x)$ d'après **Q6**

(iii) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\int_0^{+\infty}|xs_n(t)|\,\mathsf{d}t=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}$, et on a bien que $\sum a_n$ converge

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}xs_n(t)\mathsf{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}xs_n(t)\mathsf{d}t$, avec les questions précédentes on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(t,x)\mathsf{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$, en faisant la réindexation $n'=n+1$: $\boxed{\displaystyle L(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}}$.

Q8. Pour $x\in[-1,1]$, on a $-x\in[-1,1]$ et ainsi : $\displaystyle L(x)+L(-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}x^n$, or pour $n\geq 1$, on a $1+(-1)^n=\begin{cases}2 & \text{si } n \text{ pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$. Ainsi $\displaystyle L(x)+L(-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^2}x^{2p}$, d'où $\boxed{L(x)+L(-x)=\frac{1}{2}L(x^2)}$.

Q9. On a $\displaystyle L(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, ainsi $\boxed{L(1)=\frac{\pi^2}{6}}$. D'après la question précédente $L(1)+L(-1)=\frac{1}{2}L(1)$, ainsi $L(-1)=\frac{-1}{2}L(1)$, ie $\boxed{L(-1)=\frac{-\pi^2}{12}}$.

Partie III – Une autre propriété

Correction :

Q10. Pour tout $x\in]-1,1[$, avec $x\neq 0$, on a $\displaystyle L'(x)=x^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, or d'après l'énoncé, comme $-x\in]-1,1[$, $\displaystyle\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, ainsi $\boxed{\text{pour } x\neq 0,\ L'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}}$. De plus on a $\displaystyle L'(0)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{0^{n-1}}{n}=1$, ce qui montre bien que $\boxed{L'(0)=1}$.
Remarque : La fonction L est développable en série entière sur $[-1,1]$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et on peut dériver terme à terme dessus, ainsi pour $x\in]-1,1[$, on a $\displaystyle L'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$.
La formule avec ln donnée n'est rien d'autre que le développement en série entière de ln.

Q11. La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ et, pour $x\in]0,1[$, on a $h'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}-\frac{-\ln(x)}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln(x)}{1-x}=0$, ainsi $\boxed{h \text{ est constante sur }]0,1[}$.

Q12. On a $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (par cc), de plus L est continue en 0 et en 1 (d'après **Q4**), ainsi h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = L(0) + L(1) + 0$, comme h est constante sur $]0,1[$ et continue en 0, on en déduit, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,1[, \text{ que } h(x) = L(1)}$ (on a utilisé $L(0) = 0$).

On a $L\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \dfrac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t$.

De plus $L(1) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 2L\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(\frac{1}{2})\ln(\frac{1}{2})$, Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t = L\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{6} - (\ln(2))^2\right)}$.

Problème 2 : CCINP PC 2019, exercice 1

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Correction :

Q1. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale n'est donc généralisée qu'en $+\infty$, de plus PQ est un polynôme, et si $PQ \neq 0$, notons d son degré et a_d son coefficient dominant, ainsi $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} a_d t^d \mathrm{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$ (par croissance comparée), comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale converge, ce qui aussi vrai si $PQ = 0$. Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale définissant } (P|Q) \text{ est convergente}}$.

Q2. L'application est :
- Symétrique : pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on a bien (par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$) : $(P|Q) = (Q|P)$
- Bilinéaire : pour $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a (on utilise la linéarité des intégrales généralisées convergentes) : $(P+\lambda Q|R) = \int_0^{+\infty}(P(t)+\lambda Q(t))R(T)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \lambda\int_0^{+\infty} Q(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (P|R) + \lambda(Q|R)$, ainsi l'application est linéaire en sa première variable, comme elle est symétrique, elle est linéaire en sa deuxième variable. Elle est donc bilinéaire.
- Définie positive : pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a pour tout $t \geq 0$, $P^2(t)\mathrm{e}^{-t} \geq 0$, ainsi $(P|P) \geq 0$, de plus si $(P|P) = 0$ on est en présence de l'intégrale d'une fonction continue et positive qui est nulle, ainsi pour tout $t \geq 0$, $P^2(t)\mathrm{e}^{-t} = 0$, donc P est nul sur $\mathbb{R}_+$, ainsi P possède une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul, ie $P = 0$.

On a montré que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive, dit autrement $\boxed{(.|.) \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$.

Q3. Posons, pour $t \geq 0$, $u(t) = t^k$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$, ainsi u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, pour $t \geq 0$, on a $u'(t) = kt^{k-1}$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$). De plus uv converge vers 0 en $+\infty$, ainsi on peut procéder à une intégration par parties et on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = \Big[-kt^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, ie $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t}$.

Q4. On vient de montrer à la question précédente : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $(X^k|1) = k(X^{k-1}|1)$. Montrons, par récurrence (finie) sur $k \in [\![0,n]\!]$, que $(X^k|1) = k!$.

Initialisation : On a $(1|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1 = 0!$, la propriété est donc vérifiée pour $k = 0$.

Hérédité : Supposons que $(X^k|1) = k!$ pour un certain $k \in [\![0,n-1]\!]$, d'après la question précédente $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$, ainsi par hypothèse de récurrence $(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)!$, la propriété est donc vrai au rang $k+1$.

On a bien montré que $\boxed{(X^k|1) = k! \text{ pour tout entier } k \in [\![0,n]\!]}$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

Correction :

Q5. Par linéarité de la dérivation, α est bien une application linéaire (éventuellement le rédiger complètement). De plus si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(P) \leq n$, ainsi $\deg P' \leq n-1$ (donc $\deg(1-X)P' \leq n$) et $\deg P'' \leq n-2$ (ainsi $\deg XP'' \leq n-1$), on en déduit que $\deg \alpha(P) \leq n$, donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi $\boxed{\alpha \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Q6. On a $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a $\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + (1-X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1}$. On en déduit donc que : $\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}}$.

Q7. La matrice de α est donc triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent donc sur sa diagonale, on a donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}}$, Ainsi $\chi_\alpha(X) = X(X+1)\ldots(X+n)$ est scindé à racines simples, $\boxed{\alpha \text{ est donc diagonalisable}}$ (ou juste dire que α possède $n+1$ racines distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$).

Q8. $-k$ est racine simple de χ_α donc l'espace propre associé est de dimension 1, ie $\boxed{\dim(\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1}$.

Q9. Soit $Q_k \in E_{-k}(\alpha)$ avec $Q_k \neq 0$, posons $d = \deg(Q_k)$ et notons a_d son coefficient dominant, on a $a_d \neq 0$ (sinon ne serait pas de degré d) et posons $P_k = \frac{1}{a_d}Q_k$, comme $E_{-k}(\alpha)$ est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$ on a $P_k \in E_{-k}$, ie $\alpha(P_k) = -kP_k$. $\boxed{\text{On a montré l'existence}}$, reste l'unicité. On remarquera que comme $E_{-k}(\alpha)$ est de dimension 1 alors $E_{-k}(\alpha) = \mathrm{Vect}(P_k)$. Soit R_k un autre polynôme unitaire vérifiant $\alpha(R_k) = -kR_k$, ainsi $R_k \in E_{-k}(\alpha)$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = \lambda P_k$. Comme ces deux polynômes sont unitaires on a $\lambda = 1$ et donc $R_k = P_k$, $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.

Q10. Tout d'abord remarquons que $\alpha(1) = 0$ et ainsi (par unicité) $P_0 = 1$.
Supposons $k \geq 1$, notons $d = \deg(P_k)$, ie $P_k = X^d + R_k$ avec $\deg(R_k) \leq d-1$, on a $\alpha(X^d) = -dX^d + d^2X^{d-1}$ et que $\deg(\alpha(R_k)) \leq d-1$ (c'est **Q5** en prenant d à la place de n), ainsi $\deg(\alpha(P_k)) = d$ et son coefficient dominant est $-d$, alors $\alpha(P_k) = -kP_k$ donc P_k admet $-k$ comme coefficient dominant, ainsi $k = d$ ie $\boxed{P_k \text{ est de degré } k}$.

Q11. On a déjà montré que $\boxed{P_0 = 1}$, on remarque que $\alpha(X-1) = \alpha(X) - 0 = 1 - X$ ainsi (par unicité) $\boxed{P_1 = X - 1}$.
Comme $\alpha(X^2) = -2X^2 + 4X$ On a $\alpha(X^2 - 4X + 2) = -2X^2 + 4X - 4(1-X) = -2(X^2 - 4X + 2)$, ainsi (toujours l'unicité) $\boxed{P_2 = X^2 - 4X + 2}$.

Q12. On a $(\alpha(P)|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Posons, pour $t \geq 0$: $u(t) = tP'(t)\mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = Q(t)$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, pour $t \geq 0$, on a $u'(t) = (P'(t) + tP''(t))\mathrm{e}^{-t} - tP'(t)\mathrm{e}^{-t} = \alpha(P)(t)\mathrm{e}^{-t}$ et $v'(t) = Q'(t)$, de plus le crochet $[uv]$ tend vers 0 en $+\infty$, ainsi par intégration par parties $(\alpha(P)|Q) = \Big[tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, ie $\boxed{(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}$.

Q13. On a, par symétrie du produit scalaire et par la question précédente, que $(P|\alpha(Q)) = (\alpha(Q)|P) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Ainsi $\boxed{(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))}$.

Q14. Soit $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, d'après **Q13**, $(\alpha(P_k)|P_\ell) = (P_k|\alpha(P_\ell))$, en appliquant **Q9** et la bilinéarité du produit scalaire on en déduit que : $-k(P_k|P_\ell) = -\ell(P_k|P_\ell)$. Ainsi si $k \neq \ell$ on a $(P_k|P_\ell) = 0$, ainsi la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille orthogonale, de plus elle est constituée de vecteurs unitaires (donc tous non nuls, c'est donc une famille libre), comme il y en a $n+1$ et que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, on a bien que $\boxed{(P_0, \ldots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

Correction :

Q15. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, On considère :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathsf{d}t=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k. \qquad (**)$$

Comme $(**)$ est un cas particulier de $(*)$ on a $(*)\implies(**)$, de plus si $(**)$ est vérifiée, comme pour $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ il existe $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ tel que $P=\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, et la linéarité de l'intégrale (qui sont toutes convergente) permet d'avoir $(*)$.
On a donc montré $(*)\iff(**)$ (alternative pour cette démo : nommer $\varphi(P)$ et $\psi(P)$ chacun des membres de $(*)$ et utiliser que deux endomorphismes sont égaux ssi ils coïncident sur une base). Ainsi $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si (en utilisant **Q4** : $\forall k$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathsf{d}t=k!$) : $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k=k!$. Ce qui matriciellement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0!\\ 1!\\ \vdots\\ (n-1)!\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Ce qui est bien l'équivalence demandée}}$.

Q16. La matrice de la question précédente est une matrice de Vandermonde, comme $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille d'éléments 2 à 2 distinct cette matrice de Vandermonde est inversible, $\boxed{\text{ce qui montre l'existence et l'unicité d'un } n\text{-uplet } (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n \text{ vérifiant } (*)}$.

Q17. On considère $P=P_n^2$, comme les x_i sont les racines de P_n, on en déduit $\sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)=0$, or $\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathsf{d}t\neq 0$ (si cette intégrale d'une fonction continue et positive était nulle on aurait $P_n=0$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $P_n=0$, ce qui n'est pas le cas puisque P_n est unitaire de degré n), on a donc, $\boxed{\text{pour } P=P_n^2 : \int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathsf{d}t\neq\sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)}$.