# Concours Blanc « Mines-Centrale » Pc-Psi

**Composition de Mathématiques**
**Durée 4 heures**

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**Aucun document autorisé ; calculatrice et tout matériel électronique interdits**

Durées *indicatives* : 1h + 3h

### Problème 1

Ce problème traite des applications de la notion de supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel, et de ses applications tant en algèbre qu'en analyse ou en géométrie.

Les théorèmes du cours utilisés lors de la résolution de ce problème devront être énoncés avec précision, leurs hypothèses devront être soigneusement vérifiées.

Dans ce texte, $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ représente l'ensemble des fonctions numériques, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour deux espaces vectoriels $E$ et $F$, $\mathcal{L}(E,F)$ représente l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$.

## I. Deux exemples simples de supplémentaires

1° Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit $F$ le sous-espace vectoriel constitué des fonctions paires. Donner un supplémentaire de $F$ dans $E$ (justifier rapidement).

2° Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F$ le sous-espace vectoriel constitué des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions $f_1$ et $f_2$, que l'on déterminera explicitement, telles que tout élément $f$ de $F$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2 \ \text{ avec } \ (\alpha_f, \beta_f) \in \mathbb{R}^2$$

3° Déterminer l'unique matrice $A$ telle que l'on ait, pour tout $f \in F$,

$$\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

4° Montrer que $G = \{g \in E \ \text{ telle que } \ g(0) = g'(0) = 0\}$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$.

## II. Supplémentaires, stabilité et diagonalisation

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5° Montrer que $f$ est diagonalisable.

6° Montrer que le plan $(P)$ d'équation $x - y + z = 0$ est stable par $f$.

7° Déterminer un supplémentaire de $(P)$ stable par $f$.

8° Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) L'endomorphisme $f$ est diagonalisable.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de $E$ admet un supplémentaire stable par $f$.

## Problème 2 : Étude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

# Notations

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel $x$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

# I. Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1° Montrer que la fonction $R$ est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

2° Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3° Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.

# II. Étude de la dérivabilité de $R$ en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On pose :

$$S(h) = h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4° Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\phi_h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{array}.$$

5° Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathrm{d}t$.

6° Montrer que, pour tous $h \in ]0;1]$ et $t \in [1;+\infty[$, on a

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

7° En déduire que

$$S(h) \to \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ quand } h \to 0.$$

8° En déduire un équivalent de $R(x)$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction $R$ est-elle dérivable en 0 ?

# III. Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. Si $u$ est un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on pose

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si $u$ et $v$ sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs $C_1$ et $C_2$ tels que

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où la fonction $\widehat{f}$ a été définie à la question 3. On pose également

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

9° Montrer que la fonction $F$ est bien définie, $2\pi$-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

10° Montrer que la fonction $G$ est bien définie, $2\pi$-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

11° Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi).$$

12° Montrer que, pour tout réel strictement positif $a$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson*.

# IV. Étude de la dérivabilité de $R$ en $\pi$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \mathrm{i} & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

13° *Ceci n'est pas une question* (à faire par les 5/2 s'il vous reste du temps). On admet que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

14° Établir que $f'(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$, et que $f''(t) = -4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} + O(t^{-2})$ quand $t \to \pm\infty$.

15° Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x$ est convergente.

16° Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

On pose à présent

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

17° En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes $a$ et $b$ tels que

$$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2}) \text{ quand } x \to 0 \text{ par valeurs strictement positives.}$$

Préciser la valeur de $b$, et exprimer $a$ en fonction de $I$ (l'intégrale $I$ a été définie à la question 15°).

18° Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.

19° Déduire de ce qui précède que la fonction $R$ est dérivable en $\pi$, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

---

**Fin de l'énoncé**