Correction du Concours Blanc « Mines-Centrale » Pc-Psi

Problème 1 (Mines-Pont psi 2015)

I. Deux exemples simples de supplémentaires

Correction :

1° Soit G le sous-espace vectoriel constitué des fonctions impaires.
Soit $f \in F \cap G$, on a alors pour $x \in \mathbb{R}$ que $f(-x) = f(x) = -f(x)$ ainsi $f(x) = 0$, ce qui montre que la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle, ie $F \cap G = \{0\}$, la somme est donc directe.
Soit maintenant $f \in E$, posons pour $x \in \mathbb{R}$, $f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. On a $f = f_p + f_i$, de plus la fonction f_p est paire (pour $x \in \mathbb{R}$ on a $f_p(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_p(x)$) et la fonction f_i est impaire (pour $x \in \mathbb{R}$ on a $f_i(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_i(x)$), ce qui montre que $E = F + G$. Ainsi F et G sont bien supplémentaires dans F.

2° On est en présence d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Ainsi F est bien un sev de E, on a de plus qu'il est de dimension 2. L'équation caractéristique, $r^2 + r + 1 = 0$, admet deux solutions complexes conjuguées $\frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, ainsi l'ensemble des solution est l'ensemble des combinaisons linéaires de $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$ (d'après le cours de sup). D'où le résultat.

3° Soit $f \in F$, il existe alors α_f et β_f tels que $f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2$, en évaluant en 0 on trouve que $\alpha_f = f(0)$, de plus en dérivant l'égalité on trouve pour $x \in \mathbb{R}$ que $f'(x) = \alpha_f \left(\frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + \mathrm{e}^{-x/2}\frac{-\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}x/2))\right) + \beta_f \left(\frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2) + \mathrm{e}^{-x/2}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\sqrt{3}x/2))\right)$, ainsi $f'(0) = \frac{-1}{2}\alpha_f + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_f$. Ainsi en posant $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ on a $B\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$, on inverse B (qui est inversible car $\det(B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$) et on trouve $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

4° Soit $f \in F \cap G$, comme f est dans F il existe α_f et β_f dans $\mathbb{R}$ tels que $f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2$. Comme $f(0) = f'(0) = 0$ la question précédente montre que $\alpha_f = \beta_f = 0$ et donc que $f = 0$. Ce qui montre que F et G sont en somme directe.
Soit $h \in E$, posons $\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} h(0) \\ h'(0) \end{pmatrix}$, on introduit alors $f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2 \in F$ et $g = h - f$. On a alors $f(0) = h(0)$ et $f'(0) = h'(0)$ (par construction de f) et donc $(f-h)(0) = (f-h)'(0) = 0$, ie. $g \in G$. Ce qui montre bien que $E = F + G$.
On a bien montré que G est un supplémentaire de F dans E.

II. Supplémentaires, stabilité et diagonalisation

Correction :

5° Déterminons le polynôme caractéristique de f : $\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 4 & -8 \\ -5 & X+6 & -10 \\ -1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$. En faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ on trouve que $\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 4 & -8 \\ X+1 & X+6 & -10 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$, en mettant $(X+1)$ en facteur dans C_1 puis en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on trouve que $\chi_f(X) = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & X+2 & -2 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1)\left((X+2)(X-1)+2\right) = X(X+1)^2$.
Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0\}$.
Comme $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1 son noyau est de dimension 2 (d'après le

théorème du rang), ainsi $\dim E_{-1}(f)=2$. On en déduit donc que f est diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3).
On a même directement que $E_{-1}(f)=\text{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$ et on trouve après calcul que $E_0(f)=\text{Vect}((4,5,1))$.

6° Soit $(x,y,z)\in(P)$, posons $(x',y',z')=f(x,y,z)=(3x-4y+8z,5x-6y+10z,x-y+z)$. On a $x'-y'+z'=-x+y-z=0$. Ce qui montre que le plan (P) est stable par f.

7° Un supplémentaire de (P) est une droite (car $\dim(P)=2$) qui n'est pas dans (P) (pour être en somme directe), or le vecteur directeur d'une droite stable par f est un vecteur propre de f.
On va commencer à tester les trois vecteurs propres trouvés en 5), il n'y a que $(-2,0,1)$ qui convient. Ainsi $\text{Vect}(-2,0,1)$ convient.
Remarque : Déterminons les tous, si $\text{Vect}(u)$ est une droite stable qui est un supplémentaire de (P) alors u est un vecteur propre, il ne peut pas être de valeur propre 0 (car $E_0(f)\subset(P)$), il est donc de valeur propre -1. Ainsi il existe $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ tel que $u=\lambda(1,1,0)+\mu(-2,0,1)$. Comme $(1,1,0)\in(P)$ on doit avoir $\mu\neq 0$, ainsi on peut supposer que $u=\nu(1,1,0)+(-2,0,1)=(\nu-2,\nu,1)$, or $u\notin(P)$, on doit donc avoir $(\nu-2)-\nu+1\neq 0$.
On a donc montré que les supplémentaires de (P) stable par f sont exactement les droites $\text{Vect}(\nu-2,\nu,1)$ où $\nu\in\mathbb{R}$.

8° Procédons par double implication :
Sens direct : On suppose que f est diagonalisable. On introduit alors une base $\mathcal{B}_d=(f_1,\dots,f_n)$ de diagonalisation de f (où on a noté $n=\dim(E)$). Soit G un sev de E. Notons $(g_1,\dots,g_p)$ une base de G (où on a posé $p=\dim(G)$), d'après le théorème de la base incomplète on peut compléter la famille libre $(g_1,\dots,g_p)$ en une base, et cela en utilisant des éléments de $\mathcal{B}_d$, notons $\mathcal{C}$ les vecteurs de $\mathcal{B}_d$ qu'on a ainsi rajouté. Posons $F=\text{Vect}(\mathcal{C})$. F et G sont supplémentaires dans E (car la concaténation d'une base de F et d'une base de G forme, par construction, une base de E), de plus G possède une base constituée de vecteurs propre de f, on a donc que G est stable par f. On a donc montré que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.
Sens réciproque : On suppose que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f. Montrons par récurrence finie que E possède une famille libre $(f_1,\dots,f_n)$ constituée de vecteurs propre de f :
- On considère un sev H quelconque de E de dimension $n-1$ (un tel H existe car E étant de dimension finie il possède des bases il suffit de prendre le sev engendré par tous les vecteurs de cette base sauf un), il possède donc un supplémentaire stable par f, or un tel supplémentaire est de dimension 1, ainsi E possède une droite stable par f, notons f_1 un vecteur directeur de cette droite, f_1 est un vecteur propre de f.
- Supposons construit une famille libre $(f_1,\dots,f_k)$ avec $k\in[\![1,n-1]\!]$. On complète la famille libre en une base $(f_1,\dots,f_k,g_{k+1},\dots,g_n)$ de E. Posons $H=\text{Vect}(f_1,\dots,f_k,g_{k+1},\dots,g_{n-1})$, on a que $\dim(H)=n-1$ et que H possède un supplémentaire (qui est nécessairement une droite) stable par f dont on appelle f_{k+1} un vecteur directeur. Ce vecteur f_{k+1} qui est un vecteur propre de f (car engendre une droite stable par f), la famille $(f_1,\dots,f_k,g_{k+1},\dots,g_{n-1},f_{k+1})$ étant libre il en va de même pour la sous-famille $(f_1,\dots,f_k,f_{k+1})$

On a donc construit une famille libre $(f_1,\dots,f_n)$ de vecteurs propres, c'est donc une base (famille libre avec un nombre maximale d'éléments) de vecteurs propre, ie une base de diagonalisation, ainsi f est diagonalisable.

Problème 2 (Mines-Pont PC 2019)

I. Préliminaires

Correction :

1° Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, posons $u_n(x)=\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}$. On a $\left|\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$, ainsi $\|u_n\|_\infty\leq\frac{1}{n^2}$, comme $\sum\frac{1}{n^2}$ converge on en déduit que $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\boxed{R \text{ qui est bien définie sur } \mathbb{R}}$, comme de plus toutes les fonctions u_n sont continue sur $\mathbb{R}$ et que la convergence normale implique la convergence uniforme, on a donc $\boxed{R \text{ continue sur } \mathbb{R}}$.

2° La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et est prolongeable par continuité en 0 (car $\dfrac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1$), l'intégrale n'est donc généralisée qu'en $+\infty$, or pour $x>0$, $\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathsf{d}x$ est absolument convergente on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\mathsf{d}x$ est convergente.

On a donc que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\mathsf{d}x \text{ est convergente}}$.

3° Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètres , pour cela on pose, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,t) = f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}$. On a :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Hypothèse de domination : Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $|g(x,t)| = |f(t)| \leq |f(t)| = \varphi(t)$, la fonction φ est bien positive, continue par morceaux et intégrable (par hypothèse).

Ainsi $\boxed{\widehat{f} \text{ est bien définie et est continue sur } \mathbb{R}}$.

II. Étude de la dérivabilité de R en 0

Correction :

4° Pour $h>0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(nh)| \leq \frac{C}{1+n^2h^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^2h^2}$, donc $\sum f(nh)$ converge, ce qui montre que $\boxed{S(h) \text{ existe pour tout } h>0}$.

5° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [kh,(k+1)h[$, on a $\phi_h(t) = f(kh)$, ainsi ϕ_h est constante donc continue sur $[kh,(k+1)h[$, de plus $\displaystyle\lim_{t\to(kh)^+} \phi_h(t) = f(kh)$ et $\displaystyle\lim_{t\to(kh)^-} \phi_h(t) = f((k-1)h)$, ce qui montre que ϕ_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

L'intégrale n'est donc généralisée qu'en $+\infty$, or pour tout $t \geq 0$, $|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+\lfloor \frac{t}{h}\rfloor^2 h^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{C}{t^2}$, d'où la convergence de l'intégrale et donc l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathsf{d}t$.

Rappel : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $x-1 < \lfloor x\rfloor \leq x$. *Remarque* : Pour l'équivalent on a utilisé que : $1+\left(\frac{t}{h}-1\right)^2 h^2 < 1+\lfloor \frac{t}{h}\rfloor^2 h^2 \leq 1+\left(\frac{t}{h}\right)^2 h^2$ ce qui donne ainsi $\frac{1}{t^2}+\left(\frac{t-h}{t}\right)^2 < \frac{1}{t^2}\left(1+\lfloor \frac{t}{h}\rfloor^2 h^2\right) \leq \frac{1}{t^2}+1$ et donne l'équivalent par théorème d'encadrement.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{nh} \phi_h(t)\mathsf{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{kh}^{(k+1)h} \phi_h(t)\mathsf{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{kh}^{(k+1)h} f(kh)\mathsf{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} hf(kh)$, en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient donc : $\boxed{S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathsf{d}t}$.

6° Pour $h \in]0,1]$ et $t \in [1,+\infty[$, on a $|\phi_h(t)| \leq \dfrac{C}{1+\left(\lfloor \frac{t}{h}\rfloor h\right)^2}$, or $\frac{t}{h} < \lfloor \frac{t}{h}\rfloor + 1$, ainsi $\lfloor \frac{t}{h}\rfloor h \geq \left(\frac{t}{h}-1\right)h = t-h \geq t-1 \geq 0$, ainsi $\boxed{|\phi_h(t)| \leq \dfrac{C}{1+(t-1)^2}}$.

7° Utilisons avec le Théorème de convergence dominée à paramètre continu :
- Montrons, pour tout $t \geq 0$, que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \phi_h(t) = f(t)$. Pour $t \geq 0$ et $h>0$, on a déjà vu que $\frac{t}{h}-1 < \lfloor \frac{t}{h}\rfloor \leq \frac{t}{h}$ donc $t-h < \lfloor \frac{t}{h}\rfloor \times h \leq t$, donc par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{h\to 0}\lfloor \frac{t}{h}\rfloor h = t$, ainsi par continuité de f : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \phi_h(t) = f(t)$.
- Pour tout $h>0$, ϕ_h et f sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $h>0$ et $t \geq 0$, $|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}$, majorant qu'on note $\varphi(t)$. Cette fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$, et on a $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{C}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ donc φ aussi. Ainsi φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'où, d'après le TCD à paramètre continu, non seulement on a l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$ de f et de ϕ_h pour tout $h>0$, mais surtout que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\mathsf{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{h\to 0}\phi_h(t)\mathsf{d}t$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathsf{d}t}$.

8° On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{\sin(t^2)}{t^2}$ si $t \neq 0$ et par $f(0) = 1$, cette fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
On considère $g : t \mapsto (1+t^2)f(t)$, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, de plus pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g(t)| \leq \frac{1+t^2}{t^2}$, ainsi pour $t \geq 1$ on a $|g(t)| \leq 1 + \frac{1}{t^2} \leq 2$, et pour $t \in [0,1]$, on a (car $|\sin(t^2)| \leq |t^2|$) : $|g(t)| \leq 1 + t^2 \leq 2$. Ce qui montre que pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on utilise la parité de g pour les négatifs) que $|g(t)| \leq 2$, ie $|f(t)| \leq \frac{2}{1+t^2}$.
Remarque : pour justifier rapidement l'inégalité classique avec le sinus : La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de plus $\left|\sin'\right| \leq 1$, ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x) - \sin(0)| \leq |x - 0|$.
Alternative (qui utilise aussi la remarque précédente) : Pour tout $t \geq 0$ on a $|g(t)| = \frac{1+t^2}{t^2}|\sin(t)| = \frac{|\sin(t)|}{t^2} + |\sin(t)| \leq 1 + 1 = 2$.
Ainsi f satisfait aux hypothèses de la fonction f donné en début de partie, on peut donc utiliser les questions précédentes, on en déduit donc que $\lim\limits_{h\to 0} S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (d'après le résultat admis en partie I). Or (les sommes misent en jeu sont bien convergente) : $S(h) = h\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = h\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2h^2)}{n^2h^2}\right) = h + \frac{1}{h}R(h^2)$.
On en déduit donc que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}R(h^2) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, dit autrement que $R(h^2) \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}h$, ainsi (en posant $x = h^2$), on a $R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi x}{2}}$. Comme $R(0) = 0$, on a $\frac{R(x)-R(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, ainsi $\boxed{R \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

III. Formule sommatoire de Poisson

Correction :

9° Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x + 2n\pi)$.
Tout d'abord, pour $x \in \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{C_1}{1+(x+2n\pi)^2}$, ce qui montre la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)$, de plus pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on : $|f_{-n}(x)| \leq \frac{C_1}{1+(x-2n\pi)^2}$, ce qui montre la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_{-n}(x)$, ainsi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x)$ converge, donc $\boxed{F \text{ est bien définie}}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a (par décalage d'indice) : $F(x+2\pi) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi + 2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2(n+1)\pi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x + 2m\pi) = F(x)$. Ainsi $\boxed{F \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$.
Pour $x \in [0, 2\pi]$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{C_1}{1+(x+2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1+4n^2\pi^2}$, ainsi $\|f_n\|_\infty^{[0,2\pi]} \leq \frac{C_1}{1+4n^2\pi^2}$, ce qui montre la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $[0, 2\pi]$, comme toutes les fonctions f_n sont continues et comme la convergence normale implique la convergence uniforme on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0, 2\pi]$.
Pour $x \in [0, 2\pi]$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $|f_{-n}(x)| \leq \frac{C_1}{1+(x-2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1+4(n-1)^2\pi^2}$, ainsi $\|f_{-n}\|_\infty^{[0,2\pi]} \leq \frac{C_1}{1+4(n-1)^2\pi^2}$, ce qui montre la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_{-n}$ sur $[0, 2\pi]$, comme toutes les fonctions f_{-n} sont continues et comme la convergence normale implique la convergence uniforme on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}$ est continue sur $[0, 2\pi]$.
Ce qui montre la continuité de F sur $[0, 2\pi]$ et donc (par 2π-périodicité) que $\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

10° Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $|g_n(x)| = \left|\widehat{f}(n)\right| \leq \frac{C_2}{1+n^2}$, ainsi $\|g_n\|_\infty \leq \frac{C_2}{1+n^2}$, ce qui montre la convergence normale (donc uniforme) des séries $\sum_{n\geq 0} g_n$ et $\sum_{n\geq 1} g_{-n}$, comme toutes les fonctions sont continues on en déduit que $\boxed{G \text{ est définie et est continue sur } \mathbb{R}}$.
De plus toutes les fonctions g_n sont 2π-périodiques, ainsi $\boxed{G \text{ est aussi } 2\pi\text{-périodique}}$.

11° F et G étant dans $C_{2\pi}$, pour montrer que $G = 2\pi F$, il suffit de montrer que $c_p(G) = c_p(2\pi F)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ (d'après le résultat admis de l'énoncé).
Soit $p \in \mathbb{Z}$, on : $c_p(G) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-p)t}\mathrm{d}t = \widehat{f}(p)$, en effet la conver-

gence étant normale sur $[0,2\pi]$ (se fait comme à la question précédente), on peut intervertir la somme infinie avec l'intégrale propre, et $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-p)t} = 0$ si $n \neq p$ et $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-p)t} = 2\pi$ si $n = p$.

On a aussi $c_p(2\pi F) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2n\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t$ puisque la convergence est normale sur le segment $[0,2\pi]$ (se démontre comme à la question 9). Avec le changement de variable affine $u = t + 2n\pi$ (puis la relation de Chasles) on en déduit : $c_p(2\pi F) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(u-2n\pi)}\mathrm{d}u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu)}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu)}\mathrm{d}u = \widehat{f}(p)$.

On a donc $c_p(G) = c_p(2\pi F)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, ainsi (d'après le résultat admis) on a $\boxed{G = 2\pi F}$.

12° Posons, pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f\left(\frac{at}{2\pi}\right)$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, de plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $\left|(1+t^2)g(t)\right| \leq \frac{C_1(1+t^2)}{1+(at/\pi)^2} = h(t)$, cette fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet $\frac{C_1\pi^2}{a^2}$ comme limite en $+\infty$, il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, on a $h(t) \leq \frac{C_1\pi^2}{a^2} + 1$, comme h est continue sur $[0,A]$ elle est donc bornée sur $[0,A]$, ainsi h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et donc sur $\mathbb{R}$ (par parité), ainsi il existe M_1 tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) \leq M_1$. Ce qui montre que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g(t)| \leq \frac{M_1}{1+t^2}$.

Cette majoration implique aussi que g est intégrable et donc l'existence de $\widehat{g}$, de plus, avec le changement de variable $u = \frac{at}{2\pi}$ affine donc licite, on a : $\widehat{g}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{(2\pi)}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t = \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x2\pi u/a}\mathrm{d}u = \frac{a}{2\pi}\widehat{f}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$.

En procédant de la même manière que pour g, on peut montrer l'existence de $M_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|\widehat{g}(x)| \leq \frac{M_2}{1+x^2}$.

En appliquant la conséquence de la question 11° à g on a : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi)$, or pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g(2n\pi) = f(na)$ et on a montré que $\widehat{g}(x) = \frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}$

IV. Étude de la dérivabilité de R en π

Correction :

13° Pour $z \in \mathbb{C}$ on sait que $\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Ainsi, pour $t \neq 0$, $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} - 1}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t^2)^n}{n!} - 1\right) = \dfrac{1}{t^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n t^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n t^{2n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!}$. Comme $f(0) = \mathrm{i}$, cette formule est encore valable pour $t = 0$, on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!}$, f est donc développable en série entière, ainsi $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

14° Pour $t \neq 0$ on a $f'(t) = \dfrac{2\mathrm{i}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}t^2 - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} - 1)2t}{t^4} = 2\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t} - 2\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} - 1}{t^3}$. Ainsi $|f'(t)| \leq 2\frac{1}{t} + 2\frac{2}{t^3}$, ce qui montre bien que $\boxed{f'(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Pour $t \neq 0$, on a $f''(t) = 2\mathrm{i}\dfrac{2\mathrm{i}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}t - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t^2} - 2\dfrac{2\mathrm{i}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}t^3 - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} - 1)3t^2}{t^6} = -4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} - 6\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t^2} + 6\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} - 1}{t^4}$. or $\left|t^2\left(-6\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t^2} + 6\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^4}\right)\right| \leq 6 + \frac{12}{t^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 6$ donc $-6\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t^2} + 6\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^4} = \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On a bien montré : $\boxed{f''(t) = -4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} + O(t^{-2}) \text{ quand } t \to \pm\infty}$.

15° C'est l'intégrale d'une fonction paire, il suffit donc de montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x$, comme $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x$.

Posons, pour $x \geq 1$, $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$, ainsi u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et $u'(x) = \frac{-1}{x^2}$ et

$v'(x) = xe^{ix^2}$, de plus $u(x)v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc le crochet converge, ainsi $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2x^2}e^{ix^2}dx$ sont de même nature, comme $\left|\frac{i}{2x^2}e^{ix^2}\right| \leq \frac{1}{2x^2}$, on a donc que $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2x^2}e^{ix^2}dx$ converge (car converge absolument), il en va donc de même pour $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx$.

On a bien montré que $\boxed{\text{l'intégrale } I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}dx \text{ est convergente}}$.

Alternative : D'après la question précédente, on a : $e^{it^2} = \frac{-1}{4}f''(t) + \underset{t\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$, or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge et $\int_1^x f''(t)dt = \Big[f'(t)\Big]_1^x = f'(x) - f'(1)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -f'(1)$ donc $\int_1^{+\infty} f''$ converge donc $\int_1^{+\infty} e^{it^2}dt$ converge.

16° Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, notons tout d'abord que $\widehat{f}(x)$ est bien définie puisque f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car f est un grand O en $\pm\infty$ de $\frac{1}{t^2}$).
Procédons par IPP, posons, pour $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = f(t)$ et $v(t) = \frac{i}{x}e^{-ixt}$, ainsi u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = f'(t)$ et $v'(t) = e^{-ixt}$, on a $\lim_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = 0$ (car f tend vers 0 en $\pm\infty$), ainsi $\widehat{f}(x) = -\frac{i}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}dt$.
On refait une IPP, posons, pour $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = f'(t)$ et $v(t) = \frac{i}{x}e^{-ixt}$, ainsi u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = f''(t)$ et $v'(t) = e^{-ixt}$, on a $\lim_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = 0$ (car f' tend vers 0 en $\pm\infty$), ainsi $\widehat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}dt$.
Or, d'après la question 14°, $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$, posons $g(t) = f''(t) + 4e^{it^2}$, ainsi $g(t) = O(1/t^2)$ (donc g est intégrable sur $\mathbb{R}$). Ainsi (les intégrales misent en jeux sont convergentes) : $\widehat{f}(x) = \frac{4}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2-xt)}dt - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}dt$.
or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2-xt)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i((t-\frac{x}{2})^2-\frac{x^2}{4})}dt = e^{-ix^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-\frac{x}{2})^2}dt = e^{-ix^2/4}I$ (via le changement de variable $u = t - \frac{x}{2}$ affine donc licite).
Tout cela mis ensemble donne : $\left|\widehat{f}(x)\right| \leq \frac{1}{x^4}\left(4|I| + \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt\right)$, ce qui montre bien que : $\boxed{\widehat{f}(x) = O(x^{-2}) \text{ quand } x \to \pm\infty}$.

17° La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et est un grand O de $\frac{1}{t^2}$ ainsi $t \mapsto (t^2+1)f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour $\widehat{f}$, on peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson de la partie III, avec $a = \sqrt{x}$ on trouve : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$. Comme f est paire, $\widehat{f}$ l'est aussi, on a donc : $i + 2\sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right)$. On remarque que $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2x}-1}{n^2x} = \frac{1}{x}(F(x) - F(0))$, ainsi on a : $i + \frac{2}{x}(F(x) - F(0)) = \frac{\widehat{f}(0)}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$.
Posons $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$, ainsi $F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0) - \frac{i}{2}x + \sqrt{x}h(x)$.
Il reste a exprimer $\frac{\widehat{f}(0)}{2}$ en fonction de I et à montrer que $h(x) = \underset{x\to0^+}{O}(x)$.
On sait qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\widehat{f}(t)\right| \leq \frac{M}{1+t^2}$, ainsi pour tout $n \geq 1$ on a $\left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \frac{M}{1+\frac{4n^2\pi^2}{x}} = \frac{Mx}{x+4n^2\pi^2} \leq \frac{Mx}{4n^2\pi^2}$, ce qui permet d'en déduire que $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{M}{4n^2\pi^2}$, comme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{M}{4n^2\pi^2}$ ne dépend pas de x, on a bien montré $h(x) = \underset{x\to0^+}{O}(x)$.
On a montré à la question 14°, que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $tf'(t) = 2ie^{it^2} - 2f(t)$, ie $f(t) + (f(t) + tf'(t)) = 2ie^{it^2}$, en intégrant entre $-\infty$ et $+\infty$ (on a le droit) on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt + \Big[tf(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}dt$, ie $\widehat{f}(0) = 2iI$.
Finalement on a bien montré : $\boxed{F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + \underset{x\to0^+}{O}(x^{3/2}) \text{ avec } a = iI \text{ et } b = -i/2}$.

18° Pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x+\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2(x+\pi)}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2\pi}e^{in^2x}}{n^2}$. Comme n et n^2 ont la même parité on a $e^{in^2\pi} = (-1)^n$.
Comme on a convergence absolue de la série on peut séparer les termes en fonction de la parité de n, ainsi $F(x+\pi) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i4p^2x}}{4p^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{i(2p+1)^2x}}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}F(4x) - \left(F(x) - \frac{1}{4}F(4x)\right)$ (on a utilisé que la somme des termes d'indice impair valait la somme de tous les termes moins ceux d'indice pair)). Ainsi $\boxed{F(x+\pi) = \frac{1}{2}F(4x) - F(x)}$.

19° On remarque tout d'abord que $R(x) = \mathrm{Im}(F(x))$.
En utilisant les deux questions précédentes (et qu'un grand O de $x^{3/2}$ est un petit o de x) on : $F(x+\pi) = \frac{1}{2}\left(F(0) + a\sqrt{4x} + 4bx + \underset{x\to 0^+}{O}(x^{3/2})\right) - \left(F(0) + a\sqrt{x} + bx + \underset{x\to 0^+}{O}(x^{3/2})\right) = \frac{-1}{2}F(0) + bx + \underset{x\to 0^+}{o}(x) = \frac{-1}{2}F(0) - \frac{i}{2}x + \underset{x\to 0^+}{o}(x)$. Ainsi $R(x+\pi) = \frac{-1}{2}F(0) + \underset{x\to 0^+}{o}(x)$, par imparité de $x \mapsto R(x+\pi)$ (car R est impaire et 2π-périodique), on en déduit que $R(x+\pi) = \frac{-1}{2}F(0) + \underset{x\to 0}{o}(x)$, ainsi R admet un DL_1 en π, on a donc que $\boxed{R \text{ est dérivable en } \pi \text{ et que } R'(\pi) = \frac{-1}{2}}$.