

---

**DNS 10\* : pour le vendredi 22 mars**


---

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

---

**Exercice 1** (MINES-PONT PC 2016, *maths 1*).

### Préliminaire

1° Montrer que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$ .

### Partie I – Identité de Karamata

On considère dans cette partie une suite réelle  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout réel  $x \in ]-1, 1[$ , la série de terme général  $a_k x^k$  converge absolument. Pour tout réel  $x \in ]-1, 1[$ , on note  $f(x)$  la somme de cette série et l'on suppose que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} f(x) = \sqrt{\pi}$$

2° Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}$ .

3° Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$ .

et calculer sa valeur. En déduire l'égalité :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$ .

On admettra que  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$ .

4° Montrer que pour toute application polynomiale réelle  $Q$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}} dt$ .

Soit  $h$  la fonction définie, pour tout  $x \in [0, 1]$ , par :  $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, e^{-1}[ \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [e^{-1}, 1] \end{cases}$ .

5° Justifier la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$  et donner sa valeur.

6° Soit  $x \in [0, 1[$ . Justifier la convergence de la série de terme général  $a_k x^k h(x^k)$ .

On admet l'égalité (dite de Karamata) :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} h(e^{-t})}{\sqrt{t}} dt$

7° En utilisant ce résultat pour  $x = e^{-\frac{1}{n}}$ , en déduire que  $\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ .

### Partie II – Théorème taubérien

On considère une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante de réels positifs et, pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . On fait l'hypothèse que :  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ .

On va montrer qu'alors  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

On notera  $[x]$  la partie entière d'un réel  $x$ .

8° Soit  $\alpha, \beta$  un couple de nombres réels vérifiant :  $0 < \alpha < 1 < \beta$ . Pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n - [\alpha n]$  et  $n - [\beta n]$  soient non nuls, justifier l'encadrement  $\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$ .

9° Soit  $\gamma$  un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux  $\frac{n}{[\gamma n]}$  et  $\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}}$ .

10° Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon$$

11° En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} a_n = 1$ .

### Partie III – Marche aléatoire

On considère  $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$  l'ensemble des suites indexées par  $\mathbb{N}^*$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

On définit les applications coordonnées, pour tout  $i \geq 1$ ,  $X_i : \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega \mapsto \omega_i \in \mathbb{Z}$ .

On admet que l'on peut construire une tribu  $\mathcal{B}$  et une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$ , de sorte que les  $X_i$  soient des variables aléatoires, indépendantes et de même loi donnée par  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ .

On définit la suite de variables aléatoires  $(S_n, n \geq 0)$  par  $S_0(\omega) = 0$ ,  $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$ .

On définit enfin la variable aléatoire  $T$  par

$$T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$$

$$\omega \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } S_n(\omega) \neq 0, \forall n \geq 1 \\ \inf\{n \geq 1, S_n(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $E_n = \{T > n\}$ , pour  $n \geq 1$ ,  $A_n^n = \{S_n = 0\}$  et pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,

$$A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i \neq 0\}$$

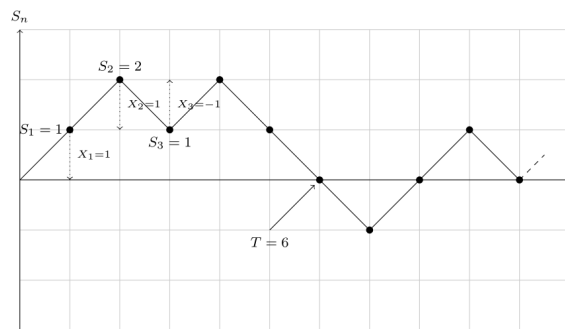


FIGURE 1 – Notations. Ici  $\omega$  commence par  $(1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1)$ .  $\omega$  appartient à  $A_6^6$  et  $A_8^8$ , ainsi qu'à  $A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^5, A_6^7$ , etc.

12° Montrer pour tout  $1 \leq k < n$ , pour tout  $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k})$$

13° Montrer pour tout  $1 \leq k < n$ , pour tout  $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$  que

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k})$$

*Indication : on pourra considérer l'application  $\theta : (z_1, \dots, z_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k} \mapsto \left( z_1, z_1 + z_2, \dots, \sum_{j=1}^{n-k} z_j \right) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ .*

14° En déduire que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$ .

15° Montrer l'égalité  $1 = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$ .

16° Pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ , établir l'égalité :  $\frac{1}{1-x} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n \right)$ .

17° Pour tout entier naturel  $n$ , calculer  $\mathbb{P}(S_n = 0)$ .

*Indication : on discutera suivant la parité de  $n$ .*

18° En déduire que, pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

19° A l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel  $n$  tend vers l'infini, un équivalent de  $\mathbb{P}(E_n)$ .

20° Montrer que l'on a :  $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$ .

21° Pour tout réel  $x \in [0, 1]$ , prouver l'égalité :  $1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n$ .

22° En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ .