DNS 11 : pour le vendredi 29 mars

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(exercice 1 E3A PSI 2018)*.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.
Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle \mid \rangle$.
Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(1) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX \geqslant 0$

(2) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda \geqslant 0$

(3) $\exists B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.

2. Soient J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha+1)I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E.

2.1. Déterminer les éléments propres de J. En déduire ceux de M.

2.2. Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$.

3. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A.

3.1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a.

On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i.

3.2. Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b(u_i) = \sqrt{\lambda_i}u_i$.
Justifier que b est un endomorphisme symétrique.

3.3. Démontrer que : $\ker(a) = \ker(b)$.

4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} < 0)$.
a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question **3.2**.

4.1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $z_i = b(e_i)$.
On va montrer que la famille $(z_1, \dots, z_{n-1})$ est libre.

Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0$.

4.1.1. Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = 0$.

4.1.2. En utilisant le produit scalaire $\displaystyle\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i \,,\, z_n \right\rangle$, conclure.

4.2. Prouver que : $\mathrm{rg}(A) \geqslant n-1$.

Exercice 2 *(exercice 1, E3A PC 2 2018)*.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne la matrice identité de taille (n,n) par I_n.
Soit $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire canonique :
Pour tous $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On note $\vec{u} = (1, \dots, 1)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 et F le sous-espace vectoriel formé par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

1. Démontrer que F est l'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Quelle est la dimension de F ?

On considère A_n la matrice de taille (n,n) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a des 0 comme coefficients diagonaux et des 1 partout ailleurs.

3. Enoncer précisément le théorème spectral. Que peut-on en conclure pour la matrice A_n ?
4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est dans F. Calculer $A_n X$ en fonction de X.
5. Déterminer les valeurs propres de A_n et, pour chacune de ses valeurs propres, le sous-espace propre associé.
6. Calculer le déterminant de la matrice A_n.

On considère B_n la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par blocs par :

$$B_n = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

7. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n. Démontrer que α est une valeur propre de $(A_n + I_n)$ ou $(A_n - I_n)$.
9. En déduire que les valeurs propres de B_n sont dans l'ensemble $\{-2, 0, n-2, n\}$.
10. Déterminer l'ensemble des valeurs prorpes de B_n.

Soit M une matrice de taille (n,n). On lui associe U_M, la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par

$$U_M = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & M \end{pmatrix}.$$

11. On suppose M diagonalisable. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les valeurs propres distinctes de M. Déterminer les valeurs propres de U_M en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.
12. La matrice U_M est-elle diagonalisable ?