DNS 11* : pour le vendredi 29 mars

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(*MINES-PONT PC 2006*, maths 2).*
L'objectif de ce problème est de montrer la propriété suivante : soient deux familles de réels $(a_k,, k=1,\cdots,n)$ et $(b_k, k=1,\cdots,n)$ satisfaisant :

$$0<a_1\leq a_k\leq a_n \text{ et } 0<b_1\leq b_k\leq b_n \text{ pour tout } k\in\{1,\cdots,n\},$$

les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$1\leq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2\sum_{k=1}^n b_k^2}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2}\leq\frac{(a_nb_n+a_1b_1)^2}{4a_1b_1a_nb_n} \tag{1}$$

On désignera dans tout le problème par :
- $\mathcal{M}_{n,p}$ l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes. On note $0_{n,p}$ la matrice nulle.
- $\mathcal{M}_n$, l'espace des matrices réelles carrées d'ordre n. On note 0_n la matrice nulle.
- $M^\top$ la transposée d'une matrice M.
- $\mathcal{S}_n$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices A qui satisfont $A^\top=A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n.
- $(X|Y)$ le produit scalaire de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$ et tout couple de matrices colonnes (X,Y) où $X\in\mathcal{M}_{n,1}$ et $X\in\mathcal{M}_{p,1}$, l'identité suivante est satisfaire : $(AX|Y)=(X|A^\top Y)$.
Définition 1 Une matrice A et dite positive lorsque pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX|X)\geq 0$. Une matrice A et dite définie positive lorsque pour tout $X\neq 0$ de $\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX|X)>0$.

A. Préliminaires

Dans cette partie, A est un élément de $\mathcal{S}_n$.

1° Montrer que A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives.

2° Montrer que A est définie positive si et seulement A est positive et inversible.

3° Si A est définie positive, montrer qu'il existe une matrice C, symétrique définie positive telle que $C^2=A$.

4° Si A et C sont symétriques définies positives et $C^2=A$, montrer que, pour tout valeur propre de A, on a :

$$\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n)=\ker(C-\sqrt{\lambda}\mathrm{I}_n).$$

5° En déduire que si A est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive telle que $C^2=A$ et que dans toute base de vecteurs propres de A, C est diagonale.
On notera désormais $C=A^{1/2}$.

6° On suppose A définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2}A^{-1/2}=A^{-1}$.

7° Prouver que $(A^{1/2})^{-1}=A^{-1/2}$.

8° Soit B une matrice symétrique positive qui commute avec A. Est-ce que $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent ?

B. Inégalité de KANTOROVITCH

Dans cette partie, A est une matrice fixée de $\mathcal{S}_n$, définie positive. On range les valeurs propres de A, répétées suivant leur multiplicité, dans l'ordre croissant : $0<\lambda_1\leq\ldots\leq\lambda_n$. On note m et M deux réels strictement positifs tels que $m\leq\lambda_1$ et $\lambda_n\leq M$.

9° Pour tout élément $X\in\mathcal{M}_{n,1}$, montrer l'inégalité suivante :

$$(X|X)^2\leq(AX|X)(A^{-1}X|X). \tag{2}$$

10° Quelles sont les matrices pour lesquelles cette inégalité est une égalité pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$?

Soit F la fonction polynômiale qui à tout s de $\mathbb{R}$ associe :

$$F(s) = s^2 - (m+M).s + mM.$$

11° Quelles sont, en fonction de celles de A, les valeurs propres de la matrice $F(A)$.

12° Montrer que toutes les valeurs propres de $F(A)$ sont de même signe. Préciser ce signe.

13° Soit N la matrice définie par :

$$N = -(A - (m+M)\mathrm{I}_n + mMA^{-1}).$$

Montrer que N est symétrique positive.

Pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on considère l'application polynômiale f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$f(s) = (AX|X).s^2 - (m+M)(X|X).s + (A^{-1}X|X)mM.$$

14° Calculer $f(0)$ et $f(1)$ et montrer que $f(0)f(1) \leq 0$.

15° Établir que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante est satisfaire :

$$(AX|X)(A^{-1}X|X) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(X|X)^2. \tag{3}$$

16° Soit $\mathcal{D} = \left\{(m,M) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < m \leq \lambda_1 \leq \lambda_n \leq M\right\}$. Établir l'identité suivante :

$$\inf_{\mathcal{D}} \frac{(m+M)^2}{mM} = \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}.$$

17° On suppose que A n'est pas une homothétie. On considère X_1 (respectivement X_n) un vecteur colonne propre, de norme 1, pour la valeur propre λ_1 (respectivement λ_n). On pose $X = X_1 + X_n$. Calculer

$$\frac{(AX|X)(A^{-1}X|X)}{(X|X)}.$$

18° Que peut-on en déduire sur l'inégalité (3) ?

C. Inégalité de Pólya-Szegö

On suppose dorénavant que A_1 et A_2 sont deux matrices symétriques, définies positives qui commutent. On note m_i (respectivement M_i), la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A_i , pour $i = 1, 2$. On pose $D = A_1A_2^{-1}$.

19° Déterminer un réel α tel que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$(DX|X)(D^{-1}X|X) \leq \alpha(X|X)^2.$$

20° Exprimer $(D(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)$ en fonction de A_1X, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$.

21° Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(A_1X|A_1X)(A_2X|A_2X) \leq \alpha(A_1X|A_2X)^2.$$

22° Établir la relation (1).