DS 8 : samedi 15 mars

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)***.**

1° Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^{2n}}{\binom{2n}{n}}$.

2° Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum n3^n x^n$.

3° On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

(a) Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?

(b) Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

(c) Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

4° Donner le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Proposer une autre écriture de $\ln(2)$ comme somme d'une série.

Exercice 2 *(E3A PC 2 2018, exercice 2)***.**

On admet l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n\geq 1} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} x^n \text{ et } T(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n} x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

1° Soit n un entier naturel non nul. Justifier que $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$.

2° Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ diverge vers $+\infty$.

3° Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I.

4° Déterminer les rayons de convergence des séries S et T.

5° Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.

6° Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$. Établir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

7° Exprimer L à l'aide de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$.

8° Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.

9° En déduire une relation entre $T - S$ et L.

10° Soit $y \in]0, 1[$.

(a) Justifier que $\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u} \mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u} \mathrm{d}u + S(y) = 0.$$

On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

(b) Justifier que $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Justifier que

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y).$$

11° Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.

Exercice 3 *(Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$,* CCP PC 2020, *exercice 3)***.**
Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q1. Que représente la variable aléatoire S_n ?

Q2. Calculer p_0, p_1 et p_2.

Q3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

Q6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q7. Montrer que $R_p \geq 1$.

Q8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right).$$

Q9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1-x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q10. Calculer q_1 et q_2.

Q11. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

Q12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

Q13. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

Q14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q15. En utilisant les questions **Q11** et **13**, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

Q16. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Exercice 4 *(E3A PC 2023, exercice 3)***.**
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x|y\rangle$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E,\ \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - x.$$

1° **Étude de l'application φ_u**

1°.1 Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

1°.2 En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

1°.3 Soit x appartenant à E, calculer $\langle \varphi_u(x)|\varphi_u(x)\rangle$.

1°.4 En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle \varphi_u(x)|\varphi_u(y)\rangle = \langle x|y\rangle.$$

1°.5 On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^\perp$.
Déterminer l'image de D_u par φ_u.
En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

1°.6 Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2° **Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$**

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

2°.1 Donner a dimension et une base orthonormale de $H^\perp$.

2°.2 Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^\perp$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

2°.3 Soit v un vecteur unitaire de $H^\perp$.
Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3° **Étude d'une réciproque**

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall x \in \Delta,\ \psi(x) = x \text{ et } \forall x \in \Delta^\perp,\ \psi(x) = -x.$$

3°.1 Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

3°.2 Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.