**DS 8 : samedi 15 mars**

# Correction

**Exercice 1** *(proche du cours et/ou des TDs).*

**Correction :**

1° Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{x^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \neq 0$, on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}((n+1)!)^2(2n)!}{|x|^n(n!)^2(2n+2)!} = \frac{|x^2|(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|^2}{4}$, d'après la règle de d'Alembert, si $x < 2$ la série $\sum u_n$ converge absolument donc $R \geq 2$, et si $x > 2$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, donc $R \leq 2$, ainsi $R = 2$.

2° Pour $x \neq 0$, $\left|\frac{(n+1)3^{n+1}x^{n+1}}{nx^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3|x|$, ainsi si $3|x| < 1$ la série converge (d'après la règle de d'Alembert), ainsi $R \geq \frac{1}{3}$, mais si $3|x| > 1$ la série diverge grossièrement et donc $R \leq \frac{1}{3}$. Ainsi $R = \frac{1}{3}$.

Pour $x \in \left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k(3x)^k = 3x\sum_{k=1}^{+\infty} k(3x)^{k-1} = \frac{3x}{(1-3x)^2}$ en utilisant $\sum nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ (série géométrique dérivée).

3° (a) Soit $R$ le rayon de convergence de cette SE, pour $x \in ]-R, R[$ on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $xf'(x) = x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.

On a $f$ solution de l'ED si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n\right)x^n = 1$ si et seulement si $2a_2 + a_0 = 1$ ie $a_2 = \dfrac{1-a_0}{2}$ et, pour tout $n \geq 1$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0$, ie $a_{n+2} = \dfrac{-1}{n+2}a_n$.

(b) Comme on veut $f(0) = f'(0) = 0$ on a $a_0 = a_1 = 0$, on en déduit par récurrence directe que $a_{2p+1} = 0$, on en déduit aussi que $a_2 = \frac{1}{2}$, puis par récurrence directe que $a_{2p} = \dfrac{-1}{2p}\dfrac{-1}{2p-2}\cdots\dfrac{-1}{4}a_2 = \dfrac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}$ (on a mis 2 en facteur dans tous les termes du dénominateur).

Réciproquement posons $f$ la somme de la série entière $\sum \frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}x^{2p}$, cette SE admet $+\infty$ comme rayon de convergence (et est solution de l'ED par construction), pour le montrer on va en même temps gagner du temps sur la question suivante en remarquant que $\frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}x^{2p} = \frac{-1}{p!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^p$, ainsi $f(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$.

(c) Déjà fait.

4° Tout d'abord : $\forall x \in ]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.

Ici on désire faire $x = 1$, mais on a pas le droit, l'égalité n'a lieu que pour $x \in ]-1, 1[$. Posons, pour $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ et notons $S$ la somme de cette série de fonctions.

Cette série de fonction converge simplement sur $[0, 1[$ vers $x \mapsto \ln(1+x)$, de plus elle converge aussi pour $x = 1$ (série harmonique alternée). Montrons que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$ :

pour $x \in [0, 1]$, $\sum f_n(-x)$ est une série alternée spéciale qui relève du TSA (car $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)$ est décroissante et tend vers 0), on a donc la majoration du reste d'ordre $n$ : $|R_n(x)| \leq \frac{x^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, ce dernier majorant ne dépend pas de $x$ et tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, dit autrement $\|R_n\|_\infty^{[0,1]}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, ainsi le reste converge uniformément vers 0, on a donc la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$. Comme toutes les fonctions $f_n$ sont continues sur $[0, 1]$, il en va donc de même pour $S$, il ne reste plus qu'a utiliser la continuité en 1 pour obtenir $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On peut appliquer le DSE à $x = -1/2$ pour obtenir (après multiplication par $-1$) : $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

**Exercice 2** *(E3A PC 2 2018, exercice 2).*

**Correction :**

1º Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $h_{2n} - h_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2º La suite $(h_n)$ est croissante (pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $h_{n+1} - h_n = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$), d'après le théorème de la limite monotone il n'y a que deux possibilités : divergence vers $+\infty$ et convergence vers un réel.
Supposons qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ainsi la suite $(h_{2n})$ converge aussi vers $\ell$, en passant à la limite dans la question précédente on trouve : $\ell - \ell \geq 0$, ce qui est absurde. Ainsi $(h_n)$ diverge vers $+\infty$.

3º Pour $x = 1$ on a, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n x^n = +\infty$, ainsi $R \leq 1$.
Pour $x < 1$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$, ainsi $|h_n x^n| \leq n|x|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi $(h_n x^n)$ est bornée pour tout $x \in ]-1,1[$, ainsi $R \geq 1$, par suite $R = 1$.
La fonction $H$ est définie sur $]-1,1[$, ne l'est pas pour $x$ tel que $|x| > 1$. De plus elle n'est pas définie pour $x = 1$ et $x = -1$ (divergence grossière), d'où $I = ]-1,1[$.
*Alternative* : Le critère de d'Alembert fonctionne bien, en effet pour $x \neq 0$ on a $\left|\frac{h_{n+1}x^{n+1}}{h_n x^n}\right| = \frac{\frac{1}{n+1}+h_n}{h_n}|x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{h_n}{h_n}x = x$, ainsi $\sum h_n x^n$ cv absolument si $|x| < 1$ donc $R \geq 1$ et $\sum h_n x^n$ diverge grossièrement si $|x| > 1$, d'où $R \leq 1$ et donc $R = 1$.

4º On sait que $\sum \frac{1}{n^2}x^n$ à le même rayon de convergence que $\sum \frac{1}{n}x^n$ donc que de $\sum x^n$, cette dernière est la série géométrique qui est de rayon de convergence 1, il en va donc de même pour $S$. De même $T$ et $H$ ont le même rayon de convergence, donc le rayon de convergence de $T$ est 1.
*Remarque* : On peut aussi le montrer, par exemple avec le critère de d'Alembert.

5º Pour tout $x \in ]-1,1[$, $g(x) = \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.Le rayon de convergence de cette série entière est 1.

6º $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ est le produit de deux fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$ (d'après la question précédente et car on sait $\forall x \in ]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$), de plus le DSE de $G$ est obtenu en faisant le produit de Cauchy des deux DSE, ainsi pour $x \in ]-1,1[$, en posant $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$ et $b_n = 1$ on a : $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{-1}{p}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} -h_n x^n = -H(x)$.

7º Pour $x \in ]-1,1[$, on a $L(x) = \displaystyle\int_0^x H(t)\mathrm{d}t = \int_0^x -G(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{1-t}\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln(1-t))^2}{2}\right]_0^x = \frac{(\ln(1-x))^2}{2} = \frac{g(x)^2}{2}$.

8º Le plus rapide est sans doute d'utiliser le fait que $L$ est la primitive de $H$ qui s'annule en 0, elle est donc développable en série entière sur $]-1,1[$ puisque $H$ l'est et son DSE s'obtient en intégrant terme à terme le DSE de $H$ (sans oublier le terme constant), ie pour $x \in ]-1,1[$, $L(x) = L(0) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h_{n-1}}{n}x^n$.
*Alternative* : La fonction $g^2$ est le produit de deux fonctions DSE sur $]-1,1[$ donc est DSE sur $]-1,1[$, il en va de même pour $L$ d'après la question précédente. Sauf qu'avec cette manière de faire le calcul est galère.

9º Pour $x \in ]-1,1[$, on a $(T-S)(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{h_n}{n} - \frac{1}{n^2}\right)x^n$, or on peut remarquer, pour $n \geq 2$, que $\dfrac{h_n}{n} - \dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} - \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{kn} = \frac{h_{n-1}}{n}$, ainsi $(T-S) = 0 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h_{n-1}}{n}x^n = L(x)$.

10º Soit $y \in ]0,1[$.

(a) La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{u}$ est continue sur $]0,y]$ donc l'intégrale n'est généralisée qu'en 0, or $\frac{\ln(1-u)}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{-u}{u} = -1$, ainsi $\varphi$ est prolongeable par continuité en 0. Donc $\int_0^y \varphi(u)\mathrm{d}u$ converge.

Pour $u \in ]-1,1[\setminus\{0\}$, $\varphi(u) = \dfrac{1}{u}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{-1}{n}u^n = -\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{u^n}{n+1}$, cette égalité est encore vrai pour $u=0$ (et en utilisant le prolongement par continuité en 0 de $\varphi$), on peut intégrer terme à terme cette série entière sur tout intervalle inclus dans son intervalle ouvert de convergence (car on a convergence normale donc uniforme), ainsi : $\displaystyle\int_0^y \varphi(u)\mathsf{d}u = \int_0^y -\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{u^n}{n+1}\mathsf{d}u = -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^y \dfrac{u^n}{n+1}\mathsf{d}u = -\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\dfrac{u^{n+1}}{(n+1)^2}\Big]_0^y = -\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{y^{n+1}}{(n+1)^2} = -S(y)$.

Ce qui montre bien que : $\displaystyle\int_0^y \dfrac{\ln(1-u)}{u}\mathsf{d}u + S(y) = 0$.

(b) On commence par montrer que $S$ est continue en 1, pour cela on pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2}x^n$, on a la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0,1]$, de plus pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n^2}x^n \le \frac{1}{n^2}$, ainsi $\|f_n\|_\infty^{[0,1]} \le \frac{1}{n^2}$, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge il en va de même pour $\sum \|f_n\|_\infty^{[0,1]}$, ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$, comme de plus tous les $f_n$ sont continues sur $[0,1]$ on en déduit que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0,1]$ donc en 1, ainsi $\displaystyle\lim_{y\to 1} S(y) = S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Comme $\int_0^y \dfrac{\ln(1-u)}{u}\mathsf{d}u = -S(y)$ on a la convergence de $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-u)}{u}\mathsf{d}u$ et que $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-u)}{u}\mathsf{d}u = \frac{-\pi^2}{6}$.

(c) Soit $y \in ]0,1[$, ainsi $1-y \in ]0,1[$, donc, d'après 10a, on a $S(1-y) = -\displaystyle\int_0^{1-y}\dfrac{\ln(1-u)}{u}\mathsf{d}u$ ; on procède au changement de variable $t = 1-u$ qui est affine donc licite ($\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant) et on a : $S(1-y) = -\displaystyle\int_1^y \dfrac{\ln(t)}{1-t}(-\mathsf{d}t) = \int_1^y \dfrac{\ln(t)}{1-t}\mathsf{d}t$. Maintenant que les bornes sont bonnes on va faire une intégration par parties, pour cela on pose $u(t) = \ln(t)$ (ainsi $u'(t) = \frac{1}{t}$) et $v(t) = -\ln(1-t)$ (ainsi $v'(t) = \frac{1}{1-t}$), ainsi $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]y,1[$ et $\displaystyle\lim_{t\to y} u(t)v(t) = -\ln(y)\ln(1-y)$ et $u(t)v(t) = -\ln(t)\ln(1-t) \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)\ln(1-t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées), on peut donc faire une IPP (on a déjà montré la convergence) : $S(1-y) = -\ln(y)\ln(1-y) + \displaystyle\int_1^y \dfrac{\ln(1-t)}{t}\mathsf{d}t = -\ln(y)\ln(1-y) - \int_0^1 \dfrac{\ln(1-t)}{t}\mathsf{d}t + \int_0^y \dfrac{\ln(1-t)}{t}\mathsf{d}t = -\ln(y)\ln(1-y) + \dfrac{\pi^2}{6} - S(y)$.

On a bien montré que, pour $y \in ]0,1[$, $\dfrac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y)$.

11° D'après la question 9 on a $T - S = L$, or d'après la question 7 on a $L(1/2) = \frac{(\ln(1/2))^2}{2}$ et d'après la question 10c on $\dfrac{\pi^2}{6} = 2S(1/2) + (\ln(1/2))^2$, ie $S(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln(1/2))^2}{2}$. On en déduit donc que $T(1/2) = S(1/2) + L(1/2) = \frac{\pi^2}{12}$.

---

**Exercice 3** ***(Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$,*** CCP PC 2020, ***exercice 3).***

## Partie I - Calcul de $p_n$

**Correction :**

**Q1.** Comme pour tout $k$, $X_k$ est la direction du pas à l'instant $k$, et comme $S_0 = 0$ est la position initiale, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ la position à l'instant $n$.

**Q2.** On a $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$, on a $p_1 = p(S_1 = 0)$, or si à l'instant 0 on est en position 0, à l'instant 1 on est en $-1$ ou en 1, ainsi $p_1 = 0$.
On a $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$, d'après la FPT avec le SCE $(X_1 = 1, X_1 = -1)$ on a : $p_2 = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 = -1)P_{(X_1=-1)}(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P_{(X_1=-1)}(X_2 = 1)$, par indépendance, on a $p_2 = P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

**Q3.** Pour $n$ impaire, $S_n$ est une somme impaire de nombres valant 1 ou $-1$, ainsi les valeurs prisent par $S_n$ sont impaires, d'où $P(S_n = 0) = 0$ si $n$ est impaire.

**Q4.** On a $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Y_k = 0) = P(\frac{X_k+1}{2} = 0) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y_k = 1) = P(\frac{X_k+1}{2} = 1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$, ainsi $Y_k$ suit bien une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

**Q5.** Les $Y_k$ sont indépendantes, ainsi $Z_n$ suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $\frac{1}{2}$ (nombre de succès quand on répète $n$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli). De pus $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k + 1}{2} = \frac{S_n}{2} + \frac{n}{2}$, ainsi $S_n = 2Z_n - n$.

**Q6.** D'après la question précédente : $S_n = 2Z_n - n$, ainsi, pour $m \in \mathbb{N}$, on a : $p_{2m} = P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}$, puisque $Z_{2m} \sim \mathcal{B}(2m, \frac{1}{2})$.

## Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Correction :**

**Q7.** Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq 1$, on en déduit que $R_p \geq 1$.
*Alternative* : Comme $(p_n 1^n)$ est borné (par 1), on a $R_p \geq 1$.

**Q8.** Pour $m \in \mathbb{N}^\star$, on a $\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m} -\frac{2k-1}{2} = \frac{(-1)^m}{m!}\frac{(-1)^m}{2^m}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}2k} = \frac{(-1)^m}{m!}\frac{(-1)^m}{2^m}\frac{\prod_{k=1}^{2m}k}{2^m\prod_{k=1}^{m}k} = \frac{(2m)!}{m!^2 4^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = p_{2m}$.

**Q9.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in ]-1, 1[$, $(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha - n + 1}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha - k + 1)\, x^n$.
Ainsi, comme si $x \in ]-1, 1[$ on a $-x^2 \in ]-1, 1[$ et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a $(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)(-1)^n x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}x^{2n} = f(x)$.

## Partie III - Loi de la variable aléatoire $T$

**Correction :**

**Q10.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, si $T = n$ alors $S_n = 0$, ainsi $(T = n) \subset (S_n = 0)$. On en déduit donc que $P(T = n) \leq P(S_n = 0)$. Ainsi $0 \leq q_n \leq p_n$. Comme $p_1 = 0$, on en déduit que $q_1 = 0$. De plus $(T = 2) = (S_2 = 0)$ (en effet $(S_1 = 0)$ est impossible), ainsi $q_2 = p_2 = \frac{1}{2}$.

**Q11.** Pour $n \in \mathbb{N}$ est $x \in [-1, 1]$, $|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T = n)\,|x|^n \leq P(T = n)$. D'où $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leq P(T = n)$. Comme $\sum P(T = n)$ converge on en déduit que $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En particulier (la cvn implique la cvs) la série entière $\sum q_n x^n$ converge pour $x = 1$, ainsi $R_q \geq 1$.

**Q12.** Comme $f$ et $g$ sont développable en série entière sur $]-1, 1[$, par produit de Cauchy $fg$ l'est aussi sur $]-1, 1[$ (voir plus) et pour $x \in ]-1, 1[$ on a : $f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n = p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n$. Comme $p_0 q_0 = 0$ et avec le résultat admis : $f(x)g(x) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = -p_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = f(x) - 1$ (puisque $p_0 = 1$).

**Q13.** Pour $x \in ]-1, 1[$, d'après **Q31**, on a $f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, ainsi $\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$, d'où $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.
En faisant comme en **Q31**, $\sqrt{1 - x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} - k + 1\right)(-1)^n x^{2n}$.

Ainsi $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$.

*Remarque* : On peut simplifier le produit, mais comme on ne l'utilisera pas, c'est inutile ici.

**Q14.** Par unicité du DSE de $g$ sur $]-1,1[$ on a $q_0 = 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $q_{2m+1} = 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$ : $q_{2m} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)$.

**Q15.** On a $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, ainsi $P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n)$.

Comme $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$ donc uniformément, et comme tous les $g_n$ sont continues sur $[-1,1]$, on en déduit que $g(1) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = 1 - \sqrt{0} = 1$, ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1$. D'où $P(T = +\infty) = 0$.

Ainsi il est certain de revenir à l'origine en temps fini.

**Q16.** On sait que $T$ est d'espérance finie si et seulement si $g$ est dérivable à gauche en 1, or pour $x \in ]-1,1[$, on a $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \underset{t \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi d'après le théorème de la limite de la dérivée, $g$ n'est pas dérivable en $1^-$, donc $T$ n'est pas d'espérance finie.

---

**Exercice 4** *(*E3A PC 2023*, exercice 3)*.

1° 1°.1 Soit $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $\varphi_u(x+\lambda y) = 2\frac{\langle x + \lambda y | u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - (x+\lambda y)$, par bilinéarité du produit scalaire : $\varphi_u(x+\lambda y) = 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - x + \lambda \left(2\frac{\langle y|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - y\right) = \varphi_u(x) + \lambda\varphi_u(y)$. Ainsi $\varphi_u$ est bien un endomorphisme de $E$.

1°.2 Pour $x \in E$, on a : $\varphi_u \circ \varphi_u(x) = 2\frac{\langle 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - x | u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - \left(2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - x\right) = 2\frac{2\langle x|u\rangle - \langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - \left(2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - x\right) = x$. Ainsi $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{id}_E$, ce qui montre que $\varphi_u$ est bijectif (donc un automorphisme de $E$) et $\varphi_u^{-1} = \varphi_u$.

*Alternative (pour le calcul de $\varphi_u \circ \varphi_u$) :* On a $\varphi_u \circ \varphi_u(x) = \varphi_u\left(2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - x\right) = 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}\varphi_u(u) - \varphi_u(x)$ par linéarité de $\varphi_u$, or $\varphi_u(u) = 2\frac{\langle u|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - u = u$, ainsi $\varphi_u \circ \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u + x = x$.

1°.3 Pour $x \in E$, on a $\langle \varphi_u(x)|\varphi_u(x)\rangle = 4\frac{\langle x|u\rangle^2}{\langle u|u\rangle^2}\langle u|u\rangle - 4\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}\langle u|x\rangle + \langle x|x\rangle = \langle x|x\rangle$. Ainsi $\varphi_u$ préserve la norme, c'est donc une isométrie de $E$.

1°.4 Comme $\varphi_u$ est une isométrie, $\varphi_u$ préserve le produit scalaire (éventuellement le redémontrer avec une identité de polarisation : pour $(x,y) \in E^2$, on a : $\langle \varphi_u(x)|\varphi_u(y)\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\varphi_u(x) + \varphi_u(y)\|^2 - \|\varphi_u(x) - \varphi_u(y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\varphi_u(x+y)\|^2 - \|\varphi_u(x-y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^Z\right) = \langle x|y\rangle$).

1°.5 Soit $x \in D_u$, ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$, on a donc $\varphi_u(x) = 2\frac{\langle \lambda u|u\rangle}{\langle u|u\rangle} u - \lambda u = \lambda u = x$, ainsi $\varphi_u(D_u) = D_u$. Comme $\varphi_u$ est une isométrie, et comme $D_u$ est stable par $\varphi_u$, on en déduit que $H_u = D_u^\perp$ est aussi stable par $\varphi_u$.

1°.6 Comme $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{id}_E$, on a que $\varphi_u$ est une symétrie. On a déjà montré $D_u \subset \ker(\varphi_u - \mathrm{id}_E)$, de plus, si $x \in H_u$, alors $\langle x|u\rangle = 0$ et donc $\varphi_u(x) = -x$, ainsi $H_u \subset \ker(\varphi_u + \mathrm{id}_E)$. Comme $E = D_u \oplus H_u$ (un sev et sont orthogonal sont supplémentaires en df), ainsi $D_u = \ker(\varphi_u - \mathrm{id}_E)$ et $H_u = \ker(\varphi_u + \mathrm{id}_E)$. On en déduit donc que $\varphi_u$ est la symétrie orthogonale par rapport à $D_u$.

2° 2°.1 $H$ est plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, on pose $v = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, ainsi $H^\perp$ est la droite dirigée par $v$, ainsi $(v)$ est une BON de $H^\perp$.

2°.2 Notons $q$ la projection orthogonale sur $H^\perp$, comme on a une BON, pour le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on a $q(X) = \langle x|v\rangle v = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} v$, ainsi la matrice $N$ de $q$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons $p$ la projection orthogonale sur $H$, ainsi $q = \mathrm{id}_E - p$, donc la matrice $M$ de $p$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M = I_3 - N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2°.3 Comme $\varphi_v$ est la symétrie par rapport à $D_v$, on a $\mathrm{id}_E + \varphi_v = 2q$, ainsi la matrice $M_v$ de $\varphi_v$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_v = 2N - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3° 3°.1 Comme on est en dimension finie : $E = \Delta \oplus \Delta^\perp$, ainsi pour $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in \Delta \times \Delta^\perp$ tel que $x = x_1 + x_2$, on en déduit que $\psi \circ \psi(x) = \psi(\psi(x_1) + \psi(x_2)) = \psi(\psi(x_1) + \psi(\psi(x_2)) = \psi(x_1) - \psi(x_2) = x_1 + x_2 = x$, ainsi $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$.

Pour $x \in E$, en notant encore $x = x_1 + x_2$ la décomposition de $x$ dans $E = \Delta \oplus \Delta^\perp$, on a $\|\psi(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\langle x_1|x_2\rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ puisque $x_1$ et $x_2$ sont orthogonaux, de même on a $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$, ainsi $\|\psi(x)\| = \|x\|$, ce qui montre que $\psi$ est une isométrie et donc conserve le produit scalaire.

3°.2 On viens de montrer que $\psi$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta$, prenons donc un élément $u$ non nul de $\Delta$, ainsi $\Delta = D_u$ et donc $\psi = \varphi_u$.