DNS 10 : pour le vendredi 22 mars

Correction

Exercice 1 *(CCP PC 2019, exercice 2).*

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Correction :

Q18. Comme f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $r > 0$ on a que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et les dérivées successives sont obtenues par dérivation terme à terme, en particulier f est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout $x \in]-r, r[$ on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, ainsi f' et f'' sont développable en série entière sur $]-r, r[$, et on sait (d'après le cours) qu'une série entière et sa dérivée ont le même rayon de convergence, ie les série définissant f, f' et f'' on le même rayon de convergence : r.

Q19. Pour $x \in]-r, r[$ on a $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -a_1 x + a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - n a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n\right)x^n = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n$. Ainsi $b_n = (n-1)^2$ convient.

Q20. f est solution de (H) sur $]-r, r[$ ssi $\forall x \in]-r, r[$, $a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0$ ssi (unicité du DSE) $a_0 = 0$ et pour tout $n \geq 2$, $(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0$ ssi $a_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $n^2(a_{n+1} - a_n) = 0$ ssi $a_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n$.

Q21. Ainsi si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, ainsi $r \geq 1$ (rq : $r = +\infty$ si $a_1 = 0$). Posons $\lambda = a_1$, en utilisant le résultat sur la somme d'une progression géométrique : $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$.

Q22. Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$, alors g est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et pour $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \lambda x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$, ainsi en utilisant **Q19**, g est solution de H sur $]-1, 1[$ (et est développable en série entière).

Partie II - Solutions de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

Correction :

Q23. z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I comme produit de telles fonctions. Pour $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = \frac{-1}{x^2}y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y'(x)$ et $z''(x) = \frac{2}{x^3}y(x) + \frac{-1}{x^2}y'(x) + \frac{-1}{x^2}y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y''(x) = \frac{2}{x^3}y(x) + \frac{-2}{x^2}y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y''(x)$.

Q24. Pour $x \in I$, $xz'' + z' = \frac{2}{x^2}y(x) + \frac{-2}{x^1}y'(x) + (1-x)\,y''(x) + \frac{-1}{x^2}y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)\right)$.

Ainsi y solution de (E) sur I ssi $x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=2x^3$ ssi $x^2(xz''+z')=2x^3$ ssi (car $0\notin I$) $xz''+z'=2x$ ssi z solution de (E_1).

Q25. Or z est solution de (E_1) ssi z' est solution sur I de l'équation différentielle $f'+\frac{1}{x}f=2$, la fonction $f_p : x\mapsto x$ est solution et les solutions de l'équation homogène associée sont les $x\mapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x)}=\frac{C}{x}$ où $C\in\mathbb{R}$. Ainsi z est solution de (E_1) sur I ssi il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in I$, $z'(x)=\frac{\lambda}{x}+x$.

Q26. On continue l'équivalence de la question précédente : z solution de (E_1) sur I ssi il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in I$, $z(x)=\lambda\ln(x)+\frac{x^2}{2}+\mu$.
On remarque que $y(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)z(x) \iff z(x)=\frac{x}{1-x}y(x)$ (car $1\notin I$).
Ainsi y est solution de (E) sur I ssi il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in I$, $y(x)=\frac{x}{1-x}\left(\lambda\ln(x)+\frac{x^2}{2}+\mu\right)$. L'ensemble des solutions de E est donc $S=\left\{\begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda x\ln(x)}{1-x}+\frac{2\mu x+x^3}{2(1-x)}\end{array}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Partie III - Solutions de (E) sur $]0,+\infty[$

Correction :

Q27. Procédons par analyse-synthèse

Analyse : Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$.

f est en particulier solution de (E) sur $]0,1[$, donc d'après **Q26**, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x\in]0,1[$, $f(x)=\frac{ax\ln(x)}{1-x}+\frac{2bx+x^3}{2(1-x)}$.

f est en particulier solution de (E) sur $]1,+\infty[$, donc d'après **Q26**, il existe $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x\in]1,+\infty[$, $f(x)=\frac{cx\ln(x)}{1-x}+\frac{2dx+x^3}{2(1-x)}$.

f vérifie (E) pour $x=1$ ainsi $-2f'(1)+f(1)=2$.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, en particulier en 1, plutôt que de calculer des limites en $1^\pm$ de f et f' on va faire un développement limité en 1^+ (celui en 1^- sera le même) : posons $x=1+h$ et prenons $h>0$, on a :

$$f(x)=\frac{c(1+h)\ln(1+h)}{-h}+\frac{2d(1+h)+(1+h)^3}{-2h}=\frac{2c(1+h)(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2))+2d(1+h)+(1+h)^3}{-2h}=\frac{2d+1+(2c+2d+3)h+(c+3)h^2+o(h^2)}{-2h}=\frac{2d+1}{-2h}+\frac{2c+2d+3}{-2}+\frac{c+3}{-2}h+o(h).$$

Pour avoir une limite finie en 1^+ on doit avoir $d=\frac{-1}{2}$.

Ainsi $f(x)=-c-1+\dfrac{c+3}{-2}h+o(h)$, d'où $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-c-1$ et on a $f'(1^+)=\frac{c+3}{-2}$.

De même en 1^- on doit avoir $b=\frac{-1}{2}$ et on a $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-a-1$ et $f'(1^-)=\frac{a+3}{-2}$. Ainsi la continuité en 1 donne $a=c$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ ne donne rien de plus. En conclusion on a montré que :
$\forall x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, $f(x)=\frac{ax\ln(x)}{1-x}+\frac{-x+x^3}{2(1-x)}=\frac{ax\ln(x)}{1-x}-\frac{x(1+x)}{2}$ et $f(1)=-a-1$.

Synthèse : Soit $a\in\mathbb{R}$ et on pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x)=\frac{ax\ln(x)}{1-x}-\frac{x(1+x)}{2}$ si $x\neq1$ et $f(1)=-a-1$, il faut montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, il n'y a qu'au voisinage de 1 qu'il faut vérifier, or $h\mapsto\frac{\ln(1+h}{h}$ est développable en série entière (de rayon de cv 1) au voisinage de 0, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, donc $x\mapsto\frac{\ln(x)}{x-1}$ est développable en série entière (de rayon de cv 1) au voisinage de 1, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1, donc f l'est aussi, ainsi f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus elle est solution de (E) par construction.

Ainsi les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$ sont les $f:\begin{array}{lcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases}\frac{ax\ln(x)}{1-x}-\frac{x(1+x)}{2} & \text{si } x\neq1\\ -a-1 & \text{si } x=1\end{cases}\end{array}$ où $a\in\mathbb{R}$.

Alternative : Plutôt que de faire un DL dans l'analyse et l'utilisation d'un DSE en synthèse on peut calculer f' et f'' et calculer les limites en $1^\pm$.