DNS 10* : pour le vendredi 22 mars

Correction

Exercice 1 *(*Mines-Pont PC 2016*, maths 1).*

Préliminaire

Correction :

1° Soit $x \in]-1,1[$, on a que : $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2}(\frac{-1}{2}-1)\dots(\frac{-1}{2}-k+1)}{k!}(-1)^k x^k$. Or pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{-1}{2}(\dfrac{-1}{2}-1)\dots(\dfrac{-1}{2}-k+1) = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} \frac{-1}{2} - i = \left(\frac{-1}{2}\right)^k \prod_{i=0}^{k-1}(1+2i)$, on reconnait le produit des nombres paires compris entre 1 et $2k-1$, on fait apparaitre $(2k)!$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} 2i = 2^k k!$, on trouve alors que $\dfrac{-1}{2}(\dfrac{-1}{2}-1)\dots(\dfrac{-1}{2}-k+1) = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^k \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$. Il en résulte que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k}{(2^k)^2(k!)^2} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$.

Alternative : Donner le DSE $x \mapsto (1+x)^\alpha$ puis l'appliquer en $-x \in]1,1[$ pour $\alpha = -1/2$ puis montrer la formule par récurrence.

Partie I – Identité de Karamata

Correction :

2° On remarque que pour tout $x \in]-1,1[$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $x^p \in]-1,1[$ et

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} &= \sqrt{1-x} f(x^{p+1}) \\
&= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^{p+1}}}\sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x+\dots+x^p}}\sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1})
\end{aligned}$$

(on a utilisé que $a^{p+1} - b^{p+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{p} a^k b^{p-k}$). On en déduit donc que : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$.

3° Soit $p \in \mathbb{N}$ et $g_p \ : \ t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$. g_p est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, l'intégrale n'est généralisée qu'en 0 et $+\infty$.

En 0 On a $g_p(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, ainsi g_p est intégrable sur $[0,1]$ (intégrale de Riemann).

En $+\infty$ on a $g_p(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^2)$ par croissances comparées (car $p+1>0$), ainsi g_p est intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'où g_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ainsi l'intégrale proposée est convergente. Le changement de variable $u = (p+1)t$ (licite car $t \mapsto (p+1)t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et strictement croissante) donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$.

La question précédente permet d'obtenir : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

4° Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Notons d son degré et $(c_0, \dots, c_d)$ ses coefficients, ie. $Q = \sum_{i=0}^{d} c_i X^i$. D'après la question précédente, pour $i \in [\![0, d]\!]$: $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k c_i (x^k)^i x^k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} c_i (e^{-t})^i}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$. Il ne reste plus qu'a sommer ces $d+1$ relations (qui sont donc en nombre finie) et à utiliser la linéarité (du passage à la limite en 1^- et de l'intégrale) pour obtenir : $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$.

5° La fonction $g \ : \ t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^\star$ (il y a un unique problème de continuité en 1 où la fonction a une limite finie à droite et gauche), ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en 0 et $+\infty$. On remarque, pour tout $x \in [0, +\infty[$, que $|h(x)| \leq \dfrac{1}{e}$, ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}_+^\star$ on a : $|g(t)| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$. On en déduit que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (le majorant l'est).
Par définition de h $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2$.

6° Soit $x \in [0, 1[$ fixé, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k = 0$, ainsi il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ à partir duquel $x^k < \frac{1}{\mathrm{e}}$, ce qui montre que la suite $(a_k x^k h(x^k))$ est ainsi nulle à partir du rang K. La série associée est donc convergente.

7° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Par définition de h, on a : $\sqrt{1 - e^{-1/n}} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-k/n} h(e^{-k/n}) = \sqrt{1 - e^{-1/n}} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on utilise l'égalité de Karamata pour obtenir : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{1 - e^{-1/n}} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) \,\mathrm{d}t = 2$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $1 - \mathrm{e}^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} x$ pour en déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{1 - e^{-1/n}}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Partie II – Théorème taubérien

Correction :

8° Comme $n \geq [\alpha n]$ (car $\alpha < 1$), on a $S_n - S_{[\alpha n]} = \sum\limits_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k$, comme la suite (a_k) est décroissante, on a $S_n - S_{[\alpha n]} \geq (n - [\alpha n]) a_n$. De plus $n - [\alpha n]$ est non nul, il est donc strictement positif, on a alors $a_n \leq \dfrac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$.

De même, comme $[\beta n] \geq n$, on a $S_{[\beta n]} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k \leq ([\beta n] - n) a_{n+1} \leq ([\beta n] - n) a_n$ et comme $[\beta n] - n > 0$, on a $\dfrac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n$.

9° Par définition de la partie entière on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x] \leq x \leq [x] + 1$. Ainsi on a $[\gamma n] \leq \gamma n \leq [\gamma n] + 1$. Comme $\gamma > 0$, on a $[\gamma n] > 0$ pour n assez grand (et tend vers $+\infty$) et on obtient en divisant par $[\gamma n]$: $1 \leq \gamma \frac{n}{[\gamma n]} \leq 1 + \frac{1}{[\gamma n]}$. Il ne nous reste plus qu'a appliquer le théorème d'encadrement (en effet $[\gamma n] \to +\infty$) pour en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{[\gamma n]} = \dfrac{1}{\gamma}$.

Comme $[\gamma n] \to +\infty$, on peut utiliser l'hypothèse faite sur la suite (S_n) pour obtenir que $\dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{\dfrac{[\gamma n]}{n}}$.

Ainsi, en utilisant la première limite, on trouve que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\gamma}$.

10° L'idée est de multiplier l'inégalité de 1° par $\sqrt{n}$ et de déterminer les limites des deux membres extrémaux, comme ils sont égaux on va traiter les deux en même temps.
Soit $\gamma > 0$ différent de 1, on re-écrit $\sqrt{n} \frac{S_n - S_{[\gamma n]}}{n - [\gamma n]}$ de tel manière a faire apparaitre des limites connues :

$$\sqrt{n} \frac{S_n - S_{[\gamma n]}}{n - [\gamma n]} = \frac{1}{1 - \frac{[\gamma n]}{n}} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \right)$$

Cette quantité tend tend vers $\frac{2(1-\sqrt{\gamma})}{1-\gamma}$.

Ainsi $\sqrt{n}a_n$ est majoré par un terme de limite $\frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}$ et est minoré par un terme de limite $\frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta}$. Par définition des limites,

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0,\; \frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta} - \varepsilon \leq \sqrt{n}a_n \leq \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$$

11° On remarque, pour $\gamma > 0$ et différent de 1, que $\frac{2(1-\sqrt{\gamma})}{1-x} = \frac{2}{1+\sqrt{\gamma}}$, cette quantité tend vers 1 quand γ tend vers 1.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \alpha < 1 < \beta$ tel que :

$$1-\varepsilon \leq \frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta} \quad \text{et} \quad \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} \leq 1+\varepsilon.$$

Ainsi pour ces α et β, la question précédente donne un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $1-2\varepsilon \leq \sqrt{n}a_n \leq 1+2\varepsilon$. Ainsi, par définition des limites, on a $\sqrt{n}a_n \to 1$ et donc $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Partie III –Marche aléatoire

Correction :

12° Par indépendance des X_i, on a $\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}) = \prod_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_j = i_{j-k})$. Comme les X_i ont toutes la même loi, $\mathbb{P}(X_j = i_{j-k}) = \mathbb{P}(X_{j-k} = j-k)$ et donc (par indépendance) $\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}) = \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(X_j = i_j) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_{n-k})$.

13° Par définition des S_n, on a :

$$\begin{cases} S_{k+1} - S_k = j_1 \\ S_{k+2} - S_k = j_2 \\ \vdots \\ S_n - S_k = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+1} + X_{k+2} = j_2 \\ \vdots \\ X_{k+1} + \cdots + X_n = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+2} = j_2 - j_1 \\ \vdots \\ X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases}$$

La question précédente permet d'en déduire que : $\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \ldots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1})$.
On procède de même (dans l'autre sens) pour obtenir :

$$\begin{cases} X_1 = j_1 \\ X_2 = j_2 - j_1 \\ \vdots \\ X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases} \iff \begin{cases} S_1 = j_1 \\ S_2 = j_2 \\ \vdots \\ S_{n-k} = j_{n-k} \end{cases}$$

Ce qui donne finalement $\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(S_1 = j_1, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k})$

14° Comme $\mathbb{P}(E_0) = \mathbb{P}(T \geq 1) = 1$ on a bien le résultat pour $k = n$, supposons $k \in [\![0, n-1]\!]$.
On a que $A_k^n = (S_k = 0) \cap (S_{k+1} \neq 0) \cap \cdots \cap (S_n \neq 0)$ et donc $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}_{S_k=0}(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0)$.
On en déduit donc que : $\mathbb{P}_{S_k=0}(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0) = \mathbb{P}_{S_k=0}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \ldots, S_n - S_k \neq 0)$.
Or les variables $S_{k+1} - S_k, \ldots, S_n - S_k$ ne dépendent que de $X_{k+1}, \ldots, X_n$ et sont donc indépendantes de S_k qui ne dépend que de $X_1, \ldots, X_k$ (car les X_i sont indépendantes). On a donc : $\mathbb{P}_{S_k=0}(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0) = \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \ldots, S_n - S_k \neq 0)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \ldots, S_n - S_k \neq 0) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j_1, \ldots, j_{n-k} \neq 0} (S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}) \right) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_{n-k} \neq 0} \mathbb{P}\left(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité viens du fait que les évènements sont incompatibles. La question précédente donne :

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \ldots, S_n - S_k \neq 0) = \sum_{j_1, \ldots, j_{n-k} \neq 0} \mathbb{P}\left(S_1 = j_1, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k}\right)$$

ainsi en faisant le même raisonnement dans l'autre sens on a :

$$\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k \neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0)=\mathbb{P}(S_1\neq 0,\dots,S_{n-k}\neq 0))=\mathbb{P}(E_{n-k})$$

Ainsi on a : $\mathbb{P}(A_k^n)=\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.

15° Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que $(A_k^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un SCE, ces parties sont disjointes (par définition) et la réunion donne Ω tout entier (car un élément $\omega\in\Omega$ est dans A_ℓ^n où ℓ est le plus grand entier k compris entre 0 et n tel que $S_k(\omega)=0$, ce plus grand élément existe car $S_0(\omega)=0$). On en déduit donc que $1=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.

16° $\sum(\mathbb{P}(S_n=0)x^n)$ et $\sum(\mathbb{P}(E_n)x^n)$ sont des séries entières de rayon de convergence au moins égal à 1 (car le terme général de ces séries est borné pour $x=1$). On peut donc procéder au produit de Cauchy à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence (là où la convergence absolue est garantie), ainsi pour $x\in]-1,1[$ on a : $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ où on a noté $u_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})=1$ (d'après la question précédente). Ce qui montre que $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$.

17° Assez clairement, au bout de n pas dans la marche on se retrouve en position de coordonnée de même parité que n, ce qui montre que pour $n\in\mathbb{N}$, si n est impaire (disons $n=2p+1$) on a $\mathbb{P}(S_n=0)=\mathbb{P}(S_{2p+1}=0)=0$. Supposons maintenant que $n=2p$ est pair. Pour être en 0 au bout de $2p$ étapes il faut avoir fait autant de $+1$ que de -1, comme les X_i sont indépendants on se trouve en situation d'équiprobabilité, il y a en tout $2^{2p}=4^p$ possibilités, parmi celles ci il y a en $\binom{2p}{p}$ qui ont autant de $+1$ que de -1, ce qui montre que $\mathbb{P}(S_n=0)=\mathbb{P}(S_{2p}=0)=\frac{\binom{2p}{p}}{4^p}$.

18° Ainsi, pour $x\in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{\binom{2p}{p}}{4^p}x^{2p}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On en déduit donc (en utilisant 16°) que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

19° Comme $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\sqrt{2}$, on va poser, pour $x\in]-1,1[$, $f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Ainsi on a bien que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égale à 1 tel que $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}f(x)=\sqrt{\pi}$ et on peut donc utiliser les résultats de la partie B. Comme $\sqrt{1-x}f(x)\to\sqrt{\pi}$ quand $x\to1^-$, on peut utiliser la deuxième partie (Identité de Karamata) et ainsi obtenir : $\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mathbb{P}(E_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}$. De plus $(\mathbb{P}(T>n))=(\mathbb{P}(E_n))$ est une suite décroissante (si $T>n$ alors $T>n-1$), ainsi le théorème taubérien permet d'obtenir que $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mathbb{P}(E_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ainsi : $\mathbb{P}(E_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$.

20° On a : $(T=+\infty)=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}(T>n)=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n$. De plus la suite (E_n) est décroissante, ainsi le théorème de continuité décroissante des probabilités permet d'obtenir : $\mathbb{P}(T=\infty)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(E_n)=0$.

21° On a $(T=n)=(T>n-1)\backslash(T>n)$ et comme $(T>n)\subset(T>n-1)$, on a $\mathbb{P}(T=n)=\mathbb{P}(T>n-1)-\mathbb{P}(T>n)$ et, pour $x\in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(T=k)x^k &= \sum_{k=0}^{n}(\mathbb{P}(T>k-1)-\mathbb{P}(T>k))x^k\\ &= \mathbb{P}(T>-1)+x\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(T>k-1)x^{k-1}-\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(T>k)x^k\\ &= 1+x\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(E_k)x^k-\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(E_k)x^k\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T=k)x^k=1+(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=1-\sqrt{1-x^2}$. Il ne reste plus qu'à remarquer que l'égalité reste vrai pour $x=1$ (car $(T=n)_{n\in\mathbb{N}}$) et ne dit rien de plus que $1=1$.

22° Pour cela on va déterminer le DSE de $g : x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$. La fonction g est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$, on a $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, Ainsi $g'(x) = x\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^{2k+1}$. On va donc prendre la primitive qui s'annule en 0 de g' pour retrouver g (car $g(0) = 0$ et ainsi on a : $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k+2)} x^{2k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2(k-1)}{k-1}}{4^{k-1}.2k} x^{2k}$. L'unicité des DSE permet d'avoir $\mathbb{P}(T = 2k) = \dfrac{\binom{2(k-1)}{k-1}}{4^{k-1}.2k}$.

Or on a : $\dbinom{2(k-1)}{k-1} = \dfrac{(2k-2)!}{((k-1)!)^2} = \dfrac{(2k)!}{(k!)^2}\dfrac{k^2}{2k(2k-1)}$. Il en résulte que : $\mathbb{P}(T = 2k) = \dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k-1)}$.