

Correction

Exercice 1 (exercice 1 E3A PSI 2018).

Correction :

1. Si on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, alors l'application $(X, Y) \mapsto X^\top Y$ n'est rien d'autre que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
- Montrons (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Soit $X \in E_\lambda(A)$. On a $X^\top AX = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|^2 \geq 0$, et donc $\lambda \geq 0$ puisque $\|X\|^2 > 0$.
 - Montrons (2) $\Rightarrow$ (3). D'après le théorème spectral (A est symétrique réelle) il existe $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P^\top \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A . Si ces valeurs propres sont positives, alors on peut poser $B = P^\top \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P$, ainsi on a $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B^2 = A$.
 - Montrons (3) $\Rightarrow$ (1). Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est tel que $B^2 = A$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $X^\top AX = X^\top B^2 X = X^\top B^\top B X = (BX)^\top BX = \|BX\|^2 \geq 0$.

Ce qui montre l'équivalence de ces trois propositions.

2. 2.1. J est de rang 1 donc (théorème du rang) 0 est valeur propre et $\dim E_0(J) = n - 1$, comme $\text{tr}(J) = n$ on en déduit que $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$. De plus $E_0(J) = \ker(J)$ est l'hyperplan d'équation $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ et $E_n(J) = \ker(J - nI_n)$ la droite dirigée par le vecteur colonne $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Remarque : On peut aussi donner une base de $\ker(J)$, ce sont les $n - 1$ vecteurs colonnes avec un 1 en premier coefficient, un -1 sur un autre coefficients (qui peut être sur le deuxième, troisième, ... , n -ième) et des 0 ailleurs.

Or pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $JX = \lambda X \iff MX = (\alpha + 1 - \lambda)X$. D'où $\text{Sp}(M) = \{\alpha + 1, \alpha + 1 - n\}$, avec $\ker(M - (\alpha + 1)I_n) = \ker(J)$ et $\ker(M - (\alpha + 1 - n)I_n) = \ker(J - nI_n)$.

- 2.2. En utilisant la question précédente et la caractérisation (2) de 1. : $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \alpha \geq n - 1$.

La question précédente permet d'avoir :

- si $\alpha > n - 1$, alors 0 n'est pas valeur propre de M , donc $\text{rg}(M) = n$.
 - si $\alpha = n - 1$, alors $\ker(M) = \ker(J - nI_n)$ est de dimension 1, donc $\text{rg}(M) = n - 1$.
- Dans tous les cas, on a donc bien $\text{rg}(M) \geq n - 1$.

3. 3.1. La matrice de A relativement à une BON est symétrique donc a est un endomorphisme symétrique, ainsi le théorème spectral assure que a est diagonalisable en base orthonormale, d'où l'existence demandée.
- 3.2. Par définition de b , sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique (et même diagonale), donc b est un endomorphisme symétrique.
- 3.3. La base $\mathcal{B}$ est une base de diagonalisation de b , ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $E_{\lambda_i}(a) = E_{\sqrt{\lambda_i}}(b)$, d'où l'égalité des deux noyaux.
4. 4.1. Remarquons que l'on a $a = b^2$, puisque ces deux endomorphismes coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de 3.1. Ainsi puisque b est symétrique (3.2), on a $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$, $\langle z_i, z_j \rangle = \langle b(e_i), b(e_j) \rangle = \langle e_i, b^2(e_j) \rangle = \langle e_i, a(e_j) \rangle = a_{i,j}$.
- En particulier si $i \neq j$, alors $\langle z_i, z_j \rangle < 0$ par hypothèse sur A .

- 4.1.1. Posons $I_1 = \{i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \mid \gamma_i \geq 0\}$ et $I_2 = \{i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \mid \gamma_i < 0\}$, de sorte que I_1 et I_2 forment une partition de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ telle que pour tout $i \in I_1$, $\gamma_i = |\gamma_i|$, et que pour tout $i \in I_2$, $\gamma_i = -|\gamma_i|$.

L'égalité $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E$ s'écrit alors $\sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i - \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i = 0_E$, ie $\sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i = \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i$.

Posons z ce dernier élément, on a $\langle z, z \rangle = \langle \sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i, \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i \rangle = \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} |\gamma_i| |\gamma_j| \langle z_i, z_j \rangle$.

Or $\langle z, z \rangle \geq 0$ et puisque I_1 et I_2 sont disjoints, on a pour $(i, j) \in I_1 \times I_2$, que (b est symétrique d'après 3.2 : $\langle z_i, z_j \rangle = \langle b(e_i), b(e_j) \rangle = \langle e_i, b^2(e_j) \rangle = \langle e_i, a(e_j) \rangle = a_{i,j} < 0$, donc $|\gamma_i| |\gamma_j| \langle z_i, z_j \rangle \leq 0$.

D'où nécessairement $\langle z, z \rangle = 0$, ie $z = 0_E$, et ainsi $\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = \sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i + \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i = z + z = 0_E$.

4.1.2. On a alors $\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \rangle = \langle 0_E, z_n \rangle = 0$ mais par linéarité, $\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \langle z_i, z_n \rangle$ est une somme de termes négatifs. Donc $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $|\gamma_i| \langle z_i, z_n \rangle = 0$, i.e. $\gamma_i = 0$ puisque $\langle z_i, z_n \rangle < 0$.

On a montré que $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\gamma_i = 0$, i.e. que la famille $(z_1, \dots, z_{n-1})$ est libre.

4.2. On vient de montrer que la famille $(b(e_1), \dots, b(e_{n-1}))$ est libre, donc que $\text{rg}(b) \geq n-1$. Or par **3.3** et le théorème du rang, on a $\text{rg}(b) = \text{rg}(a)$. Donc $\text{rg}(a) = \text{rg}(A) \geq n-1$.

Exercice 2 (*exercice 1*, E3A PC 2 2018).

Correction :

1. Soit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\vec{x} \in F \iff \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i \times 1 = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i = 0$, ce qui montre bien le résultat demandé.
2. On peut utiliser la question 1 en introduisant $f : \vec{x} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ qui est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, son image est incluse dans $\mathbb{R}$ et comme $f(u) = n \neq 0$ son image est égale à $\mathbb{R}$, elle est donc de dimension 1, le théorème du rang permet d'en déduire que son noyau, qui n'est rien d'autre que F , est de dimension $n-1$.

Alternative : On a $F = \text{Vect}(\vec{u})^\perp$, or un espace vectoriel et son orthogonal sont supplémentaires (on est en dimension finie), en particulier $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(F) + \dim(\text{Vect}(\vec{u}))$, ainsi $\dim(F) = n-1$

3. Théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale. La matrice A_n est symétrique réelle, dont il existe une matrice P orthogonale et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_n = P D P^\top$.

$$4. \text{ Comme } \vec{x} \in F \text{ on a } \sum_{i=1}^n x_i = 0. \text{ On a donc : } A_n X = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n x_i \\ \vdots \\ \sum_{i \neq j}^n x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_j \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -X.$$

Dit autrement F est inclus (en identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ie en identifiant X et $\vec{x}$) dans l'espace propre $E_{-1}(A_n)$.

5. On a -1 valeur propre de multiplicité au moins $n-1$, il ne manque donc qu'une seule valeur propre (qui, a priori, peut être -1) notons la α (existe nécessairement, car A_n est diagonalisable), comme le polynôme caractéristique est scindé (car A_n est diagonalisable) sa trace vaut la somme des valeurs propre, ainsi $0 = -(n-1) + \alpha$, ainsi $\alpha = n-1$ (*Alternative :* Calculer le polynôme caractéristique de A_n).

En conclusion $\text{Sp}(A_n) = \{-1, n-1\}$. Déterminons maintenant les sous-espaces propres.

Notons $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $E_j - E_1 \in E_{-1}(A_n)$, or cette famille d'éléments de $E_{-1}(A_n)$ est libre (car échelonnée) et à autant d'élément que la dimension de cet espace, on

a donc $E_{-1}(A_n) = \text{Vect}(E_2 - E_1, \dots, E_{n-1} - E_1)$. On peut remarquer que $A_n U = (n-1)U$, où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

ainsi $E_{n-1}(A_n) = \text{Vect}(U)$.

Alternative : On peut tout d'abord remarquer que comme A_n est diagonalisable (car A_n symétrique réelle) alors $\dim(E_{-1}(A_n)) = n-1$, or on a montré à la question précédente que $F \subset E_{-1}(A_n)$, donc $F = E_{-1}(A_n)$. De plus, comme A_n est symétrique réelle, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, comme il n'y en a que deux, on en déduit que $E_{n-1}(A_n) = F^\perp$, or $F^\perp = \text{Vect}(U)$.

Alternative 2 : Résoudre à la main $A_n X = (n-1)X$.

6. Comme le polynôme caractéristique de A_n est scindé, son déterminant vaut le produit des valeurs propres, ie $\det(A_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$.
7. On a : $B_n^\top = \begin{pmatrix} A_n^\top & I_n^\top \\ I_n^\top & A_n^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix} = B_n$, ainsi B_n est symétrique réelle, donc diagonalisable.

8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé, écrit par bloc, on a $X \neq 0$ et $B_n X = \alpha X$.

On a aussi $B_n X = \begin{pmatrix} A_n X_1 + X_2 \\ X_1 + A_n X_2 \end{pmatrix}$, ainsi on a : $\begin{cases} A_n X_1 + X_2 = \alpha X_1 \\ X_1 + A_n X_2 = \alpha X_2 \end{cases}$. En sommant les lignes on a $(A_n +$

$I_n)(X_1 + X_2) = \alpha(X_1 + X_2)$ et en prenant la différence $(A_n - I_n)(X_1 - X_2) = \alpha(X_1 - X_2)$.

Si $X_1 + X_2 \neq 0$ alors α est valeur propre de $A_n + I_n$.

Si $X_1 + X_2 = 0$, alors nécessairement $X_1 - X_2 \neq 0$ (en effet sinon on en déduirait $X_1 = X_2 = 0$ et donc que $X = 0$, ce qui n'est pas le cas) et dans ce cas α est valeur propre de $A_n - I_n$.

9. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si X est vecteur propre de valeur propre β de A_n alors $(A_n + I_n)X = (\beta + 1)X$ et donc X est vecteur propre de valeur propre $\beta + 1$ de $A_n + I_n$, comme A_n est diagonalisable, il existe une base de vecteur propres de A_n , c'est donc aussi une base de vecteur propre de $A_n + I_n$, ainsi $\text{Sp}(A_n + I_n) = \{\beta + 1, \beta \in \text{Sp}(A_n)\} = \{0, n\}$. De même on a $\text{Sp}(A_n - I_n) = \{\beta - 1, \beta \in \text{Sp}(A_n)\} = \{-2, n - 2\}$. Avec la question précédente on a bien $\text{Sp}(B_n) \subset \{-2, 0, n - 2, n\}$.

10. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A_n)$ et X_1 un vecteur propre de A_n de valeur propre λ , ie $X_1 \neq 0$ et $A_n X_1 = \lambda X_1$, posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$, on a $B_n X = \begin{pmatrix} A_n X_1 + X_1 \\ X_1 + A_n X_1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)X$, ainsi $\lambda + 1$ est valeur propre de B_n , de même en prenant $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}$ on a $\lambda - 1$ valeur propre de B_n . Ce qui montre que $\{-2, 0, n - 2, n\} \subset \text{Sp}(B_n)$ et donc l'égalité.

11. On peut procéder comme en 8 et 10 pour avoir $\text{Sp}(U_M) = \text{Sp}(M + I_n) \cup \text{Sp}(M - I_n) = \{\alpha_i \pm 1, i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$, en effet on a uniquement utilisé que A_n était diagonalisable (pas qu'elle était symétrique).

12. Comme M est diagonalisable, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

Les colonnes de P sont des vecteurs propres de M , or la démonstration de 8 nous dit que si $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ est

vecteur propre de M alors $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de U_M , ce qui nous pousse à poser la

matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$ (car ses colonnes sont des vecteurs propres de U_M), pour conclure quand au fait que U_M est diagonalisable il suffit donc de montrer que Q est inversible, or c'est le cas, pour cela il suffit de remarquer que la matrice $R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} \\ P^{-1} & -P^{-1} \end{pmatrix}$ est telle que $QR = I_{2n}$, elle est donc son inverse.

On a donc montré l'existence d'une matrice inversible dont les vecteurs colonnes sont des vecteurs propres de U_M (version matricielle de : il existe une base constituée de vecteurs propre) donc U_M est diagonalisable.

Alternative : On peut poser la même matrice Q , donner Q^{-1} et calculer $Q^{-1}U_M Q$ pour voir qu'elle est diagonale (c'est $\begin{pmatrix} D + I_n & 0 \\ 0 & D - I_n \end{pmatrix}$).