

Correction

Exercice 1 (MINES-PONT PC 2006, *maths 2*).

A. Préliminaires

Correction :

1° Sens direct : On suppose A positive, soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et X un vecteur colonne propre associé, c'est donc un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$, on a $(AX|X) = \lambda(X|X)$, comme A est positive on a $(AX|X) \geq 0$, comme de plus $(X|X) \geq 0$ (car c'est le carré de la norme associé au produit scalaire), on en déduit donc que : $\lambda \geq 0$.

Sens réciproque : On suppose que les valeurs propres de A sont positives. Comme A est symétrique réelle, d'après le théorème spectral il existe P orthogonal et D diagonale (dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A) tel que $A = PDP^\top$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on a $(AX|X) = X^\top AX = X^\top PDP^\top X = (P^\top X)^\top D(P^\top X) = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \geq 0$, où $(y_1, \dots, y_n)$ sont les coordonnées de $P^\top X$, ce qui montre que A est positive.

Alternative : Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, comme A est symétrique réelle on a (théorème spectrale) : $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(A)$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A et cette somme directe est orthogonale. Ainsi il existe $(X_1, \dots, X_p)$, où $X_i \in E_{\lambda_i}(A)$, tel que $X = X_1 + \dots + X_p$, de plus les X_i sont deux à deux orthogonaux. On a : $(AX|X) = \left(\sum_{i=1}^p AX_i \middle| \sum_{l=1}^p X_l\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} (\lambda_i X_i | X_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (X_i | X_i) \geq 0$ (puisque tous les λ_i et $(X_i | X_i)$ sont positifs).

2° Sens direct : On suppose A définie positive. Soit X tel que $AX = 0$, ainsi $(AX|X) = 0$ et donc $X = 0$ (par définition de définie positive), ainsi 0 n'est pas valeur propre de A , ie A est inversible.

Sens réciproque : On suppose A positive et inversible. Soit $X \neq 0$ un vecteur colonne, ainsi $P^\top X \neq 0$, ainsi (en utilisant les notations de la question précédente) $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 = 0$ et donc $P^\top X = 0$ et donc $X = 0$.

3° On reprend les notations de la question 1°, on note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, comme les λ_i sont positifs on peut poser $E = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, ainsi $E^2 = D$, il suffit alors de poser $C = PEP^\top$ pour avoir $C^2 = A$. De plus C est bien symétrique (car $C^\top = (P^\top)^\top EP = C$), on a aussi que ses valeurs propres sont positives (ce sont les coefficients diagonaux de E) et est inversible (car ses valeurs propres sont non nulles puisque ce sont des racines carrées de réels strictement positifs), c'est donc une matrice définie positive.

4° Soit λ une valeur propre de A . Si $X \in \ker(C - \sqrt{\lambda}I_n)$, on a $AX = C^2X = \lambda X$, ce qui montre que $\ker(C - \sqrt{\lambda}I_n) \subset \ker(A - \lambda I_n)$.

De plus $A - \lambda I_n$ est stable par C (car C et $A - \lambda I_n$ commutent puisque $AC = C^3$), donc, en travaillant avec les endomorphismes canoniquement associés (qu'on note a et c), l'endomorphisme c_λ induit par c sur cet espace est diagonalisable (car il est symétrique réel), soit x un vecteur propre de c_λ , notons μ la valeur propre associée, on a $c_\lambda(x) = \mu x$, or $a(x) = c^2(x) = \mu^2 x$ et d'autre part (comme $x \in E_\lambda(a)$) $a(x) = \lambda x$, ce qui montre (comme $x \neq 0$) que $\mu = \sqrt{\lambda}$. Ce qui montre que $c_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{Id}$ (car diagonalisable avec une unique valeur propre). Ainsi $\ker(a - \lambda \text{Id}) \subset \ker(c - \sqrt{\lambda} \text{Id})$.

On a bien montré que : $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(C - \sqrt{\lambda} I_n)$.

5° Reste à montrer l'unicité, soit C et C' sont tels que $C^2 = C'^2 = A$, posons $F = C - C'$ et introduisons une base de diagonalisation $(X_1, \dots, X_n)$ de A , ainsi $AX_i = \lambda_i X_i$, or d'après la question précédente $CX_i = C'X_i = \sqrt{\lambda_i} X_i$, ie $FX_i = 0$. Comme c'est vrai pour tout X_i on en déduit que $F = 0$ (l'endomorphisme canoniquement associé est nul pour tous les vecteurs d'une base, c'est donc l'endomorphisme nul), ainsi $C = C'$.

6° On a A^{-1} symétrique (car $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} = A^{-1}$) et est définie positives (car ses valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de celles de A), elle possède donc une unique racine carré définie positive d'après ce qui précède.

7° Comme $(A^{1/2})^2 = A$ on a $((A^{1/2})^{-1})^2 = A^{-1}$, ainsi $(A^{1/2})^{-1}$ et $(A^{-1/2})$ sont toutes les deux définies positives et ont le même carré, elle sont donc égale par unicité montré en 5°.

8° Travaillons avec les endomorphismes canoniquement associés. a est diagonalisable et $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(a)} E_\lambda(a)$, comme

a et b commutent les sous-espaces propres de a sont stables par b , notons b_λ l'endomorphisme induit par b sur $E_\lambda(a)$, comme b_λ est encore symétrique elle est diagonalisable. En concaténant les bases de diagonalisation de b_λ sur $E_\lambda(a)$ on a une base de diagonalisation commune de a et de b qu'on peut choisir ON. On a alors $A = PD_A P^\top$ et $B = PD_B P^\top$, en utilisant la question 3° (et ses notations) on a $A^{1/2} = PE_A P^\top$ et $B^{1/2} = PE_B P^\top$, il ne reste plus qu'à utiliser que deux matrices diagonales commutent pour conclure : $A^{1/2}B^{1/2} = PE_A E_B P^\top = B^{1/2}A^{1/2}$.

B. Inégalité de KANTOROVITCH

Correction :

9° En utilisant le fait que $A^{1/2}$ et $A^{-1/2}$ sont symétriques on a : $(X|X)^2 = (X|A^{1/2}A^{-1/2}X)^2 = (A^{1/2}X|A^{-1/2}X)^2 \leq (A^{1/2}X|A^{1/2}X)(A^{-1/2}X|A^{-1/2}X)$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz) d'où $(X|X)^2 \leq (A^{1/2}A^{1/2}X|X)(A^{-1/2}A^{-1/2}X|X)$ et enfin $(X|X)^2 \leq (AX|X)(A^{-1}X|X)$.

10° Cette inégalité est une égalité quand l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée est une égalité, ie quand $A^{1/2}X$ et $A^{-1/2}X$ sont liés. Ceci arrive quand l'une d'elles est nulle, ie quand $X = 0$, ou quand il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^{1/2}X = \lambda A^{-1/2}X$, ie quand $AX = \lambda X$.

L'inégalité est donc une égalité pour tout X si et seulement si tout X est vecteur propre ie ssi A est une homothétie, ou de manière équivalent lorsque $\lambda_1 = \lambda_n$.

11° Tout d'abord, si λ est valeur propre de A et X un vecteur propre de A de valeur propre λ , alors $F(A)X = A^2X - (m+M)AX + mM X = (\lambda^2 - (m+M)\lambda + mM)X$, ainsi une base de diagonalisation de A est une base de diagonalisation de $F(A)$, et les valeurs propres de $F(A)$ sont donc les $F(\lambda_i)$, ie les valeurs propres de $F(A)$ sont les images par F des valeurs propres de A .

12° Comme $F(s) = (s-m)(s-M)$. Les valeurs propres de A sont dans $[m, M]$, leur image par F est négative ou nulle : les valeurs propres de $F(A)$ sont négatives ou nulles

13° A et A^{-1} sont symétriques donc N aussi. De plus, A^{-1} et $F(A)$ sont symétriques et commutent donc sont simultanément diagonalisables (cf le raisonnement de la question 8°). Il existe donc une matrice inversible (et même orthogonale) P telle que $PA^{-1}P^{-1}$ et $PF(A)P^{-1}$ soient diagonales avec des coefficients diagonaux respectivement positifs (car A^{-1} est positive) et négatifs (car les valeurs propres de $F(A)$ sont négatives). La matrice $PA^{-1}F(A)P^{-1}$ est donc diagonale à coefficients négatifs. Enfin $N = -A^{-1}F(A)$ donc PNP^{-1} est diagonale à coefficients positifs : toutes les valeurs propres de N sont donc positives. Ainsi, d'après la question 1°, la matrice N est symétrique positive.

14° $f(0) = (A^{-1}X|X)mM$ et $f(1) = (AX|X) - (m+M)(X|X) + (A^{-1}X|X)mM = -(NX|X)$.

Ainsi, $f(0)f(1) = -mM(A^{-1}X|X)(NX|X)$. A^{-1} et N étant positives et $m, M > 0$ on a donc $f(0)f(1) \leq 0$.

15° Pour $X = 0$, l'inégalité est vérifiée (car dit $0 \leq 0$). Pour $X \neq 0$, f est un polynôme du second degré en s (car $(AX|X) > 0$) qui possède une racine réelle (comme $f(0)f(1) \leq 0$ et f est continue on peut appliquer le TVI). Ainsi, son discriminant est supérieur ou égal à 0, ie $((m+M)(X|X))^2 - 4mM(AX|X)(A^{-1}X|X) \geq 0$, soit, vu

que $mM \neq 0$: $(AX|X)(A^{-1}X|X) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(X|X)^2$

16° On cherche la valeur inférieure de $\frac{(m+M)^2}{mM} = \frac{m}{M} + \frac{M}{m} + 2$. On introduit $\varphi : t \mapsto t + \frac{1}{t} + 2$ définie sur $]0, 1]$, de plus si on considère les t de la forme $\frac{m}{M}$, cela consiste à prendre les valeurs de t dans $]0, \frac{\lambda_1}{\lambda_n}]$, Cette fonction

φ est décroissante sur $]0, 1]$, ainsi l'inf recherché est en fait $\varphi(\lambda_1/\lambda_n)$, ce qui montre bien que $\inf_{\mathcal{D}} \frac{(m+M)^2}{mM} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}$.

17° A n'est pas une homothétie donc $\lambda_1 < \lambda_n$ (si on avait l'égalité, A serait une matrice diagonalisable avec une unique valeur propre et donc une homothétie). Comme A est symétrique, X_1 et X_n sont orthogonaux. On a donc $(AX|X) = (\lambda_1 X_1 + \lambda_n X_n | X_1 + X_n) = \lambda_1 (X_1 | X_1) + \lambda_n (X_n | X_n) = \lambda_1 + \lambda_n$. De même : $(A^{-1}X|X) = \lambda_1^{-1} (X_1 | X_1) + \lambda_n^{-1} (X_n | X_n) = \lambda_1^{-1} + \lambda_n^{-1}$. Enfin, $(X|X) = (X_1 + X_n | X_1 + X_n) = (X_1 | X_1) + (X_n | X_n) = 2$.

On en déduit que : $\frac{(AX|X)(A^{-1}X|X)}{(X|X)^2} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)(\lambda_1^{-1} + \lambda_n^{-1})}{4} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}$.

18° On déduit que l'inégalité (3) est optimale quand A n'est pas une homothétie : c'est en effet une égalité dans le cas où $m = \lambda_1$, $M = \lambda_n$ et X choisi comme ci-dessus. Mais aussi quand A est une homothétie, ie $A = \lambda I_n$ on a $(AX|X)(A^{-1}X|X) = \lambda \frac{1}{\lambda} (X|X)^2 = (X|X)^2$ et $\frac{(m+M)^2}{4mM} (X|X)^2 = (X|X)^2$ (pour $m = M = \lambda$).

C. Inégalité de PÓLYA-SZEGÖ

Correction :

19° On a déjà montré l'existence d'une matrice orthogonale et deux matrices diagonales D_1 et D_2 telles que $A_1 = PD_1P^\top$ et $A_2 = PD_2P^\top$. On a donc $D = PD_1D_2^{-1}P^\top$. Ainsi les valeurs propres de D sont de la forme $\frac{\lambda}{\mu}$ où $\lambda \in \text{Sp}(A_1)$ et $\mu \in \text{Sp}(A_2)$, elles sont donc comprises entre $m = \frac{m_1}{M_2}$ et $M = \frac{M_1}{m_2}$. Comme D est définie positive on peut lui appliquer (3). Ainsi $\alpha = \frac{(m+M)^2}{4mM} = \frac{(m_1m_2+M_1M_2)^2}{4m_1m_2M_1M_2}$ convient.

20° A_1 et A_2 commutent donc $A_1^{1/2}$ et $A_2^{1/2}$ aussi. On a donc $(A_1^{1/2}A_2^{1/2})^2 = (A_1^{1/2})^2(A_2^{1/2})^2 = A_1A_2$. Ainsi, $A_1^{1/2}A_2^{1/2}$ est une matrice symétrique définie positive dont le carré est A_1A_2 d'où $A_1^{1/2}A_2^{1/2} = (A_1A_2)^{1/2}$.
 $A_1^{1/2}$ et $A_2^{1/2}$ commutant on voit également que $(A_1A_2)^{1/2}$ et D commutent d'où $(D(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X) = ((A_1A_2)^{1/2}DX|(A_1A_2)^{1/2}X) = (DX|(A_1A_2)X)$ (car $(A_1A_2)^{1/2}$ est symétrique). La quantité précédente est donc égale à $(A_1A_2^{-1}X|A_1A_2X) = (A_2^{-1}A_1X|A_2A_1X) = (A_1X|A_1X)$, car A_2 est symétrique et commute avec A_1 .

21° On échange les rôles de A_1 et A_2 dans ce qui précède, ainsi on change D en D^{-1} et on ne modifie pas les produits A_1A_2 (car A_1 et A_2 commutent). On obtient $(D^{-1}(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X) = (A_2X|A_2X)$. On a donc $(A_1X|A_1X)(A_2X|A_2X) = (D(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)(D^{-1}(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)$. L'égalité de 19) étant vraie pour toute colonne X on obtient en substituant $(A_1A_2)^{1/2}X$ à X :

$$(D(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)(D^{-1}(A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X) \leq \alpha((A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X)^2.$$

Or $((A_1A_2)^{1/2}X|(A_1A_2)^{1/2}X) = (((A_1A_2)^{1/2})^2X|X) = (A_1A_2X|X) = (A_1X|A_2X)$, d'où :

$$(A_1X|A_1X)(A_2X|A_2X) \leq \alpha(A_1X|A_2X)^2.$$

22° D'une part : l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique appliquée aux vecteurs

$(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ donne $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$ soit, comme le membre de gauche est strictement

positif, $1 \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2}.$

D'autre part : on prend $A_1 = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $A_2 = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ et X la colonne ne contenant que des 1. Toutes les hypothèses de la partie III sont vérifiées : A_1 et A_2 sont évidemment symétriques, définies positives car les a_i et b_i sont strictement positifs, et commutent car toutes deux diagonales. Enfin, avec les notations de cette partie, on a $m_1 = a_1$, $M_1 = a_n$, $m_2 = b_1$ et $M_2 = b_n$, soit $\alpha = \frac{(a_1b_1 + a_nb_n)^2}{4a_1b_1a_nb_n}$. L'inégalité de

la question précédente devient alors $\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \frac{(a_1b_1 + a_nb_n)^2}{4a_1b_1a_nb_n} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2$ ou encore $\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2} \leq$

$$\frac{(a_1b_1 + a_nb_n)^2}{4a_1b_1a_nb_n}.$$