hotline : Francois.DROUOT@gmail.com

Le tour de la PCSI en ~~80 jours~~ 100 questions

La section « *Quoi qu'il en coûte !* » est une liste (non exhaustive) d'exercices que tout le monde doit savoir faire et est à traiter dans un premier temps.

Ensuite vous trouverez une liste d'exercices qu'il faut savoir traiter, ceux indiqués du symbole ($\star$) sont plutôt pour ceux qui désirent passer comme concours : Centrale, Mines et X/ENS (où qui veulent traiter les dernières questions sur CCINP).

www.mathspc.sitew.fr

Quoi qu'il en coûte !

Q1. Je sais manipuler des nombres complexes : Mettre sous forme algébrique $z_1 = \frac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$, mettre $z_2 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique (ie. de la forme $re^{\mathrm{i}\theta}$).

Q2. Je connais mes formules de trigonométrie : Énoncer les formules donnant $\cos(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. En déduire les formules de $\tan(a+b)$ et $\tan(2a)$.

Q3. Je sais résoudre des équations trigonométriques : Résoudre pour $\theta \in [0, 2\pi[$, $\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 1$.

Q4. Je connais ln et exp : Représenter dans un même repère orthonormé, et avec soin, les graphes de exp et ln ainsi que la première bissectrice du repère. On précisera des équations des tangentes à $\mathcal{C}_{\exp}$ en $A(0,1)$ et $B(1,\mathrm{e})$ et l'on en déduira les tangentes à $\mathcal{C}_{\ln}$ en $C(1,0)$ et $D(\mathrm{e},1)$.
Donner les différentes formules faisant intervenir ln (ainsi que les versions exp).

Q5. Je connais mes fonctions usuelles : arccos, arcsin, arctan, ch et sh (on tracera l'allure du graphe, on précisera bien les domaines de définition, de dérivabilité et les expressions des dérivées).
Pour quelles valeurs de x a-t-on $\cos(\arccos(x)) = x$? et pour $\arccos(\cos(x)) = x$?

Q6. Je connais la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ (et de la version fonction) et je sais ce qu'on a le droit de faire et de ne pas faire avec des équivalents.

Q7. Je sais démontrer une inégalité avec une étude de fonction, manipuler des sommes télescopiques et utiliser le théorème de comparaison des suites : Montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge :

(a) Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

(b) Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, déduire de (a) une minoration de H_n.

(c) Conclure (on remarquera que pour tout $k \geq 1$, $\ln(1+\frac{1}{k}) = \cdots$).

Q8. Je connais mes développements limités usuels.

Q9. Je sais composer des DL : Calculer le développement limité de $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ et de $x \mapsto \ln(1+\cos(x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Q10. Je connais mes théorèmes pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 (normalisée à coefficients continues) et d'ordre 2 (à coefficient constant) : résoudre dans $\mathbb{R}$:
$(E_0) \quad y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$; $(E) \quad y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = 6x$; $(F) \quad y'' - 3y' + 2y = 0$ et $(G) \quad y'' + y' + y = 0$.

Q11. Je sais à quelle condition sur les évènements A et B on a $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ou $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, et je n'oublie pas de le signaler.

Q12. Je sais modéliser une expérience et déterminer des probabilités : On pioche 10 boules dans une urne contenant 10 boules bleues et 5 boules blanches. Donner la loi de X quand :

(a) X est le nombre de boules blanches obtenues quand on procède *sans remise* ;

(b) X est le nombre de boules blanches obtenues quand on procède *avec remise*.

Q13. Je sais utiliser la formule des probabilités totales : Soit X et Y deux var indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ (on n'essaiera pas de simplifier la somme).

Q14. Je sais montrer qu'une suite est croissante et appliquer le théorème de la limite monotone : Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Q15. Je sais étudier une suite définie par une relation de récurrence : Soit $a \in]0,2]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+2}$.

(a) Montrer que la suite est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $]0,2]$.

(b) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.

(c) Quid si $a > 2$?

Q16. Je sais manipuler des sommes géométriques :

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ sans symbole de sommation.

En déduire les conditions de convergence et la valeur de la somme de la série $\sum x^n$ puis la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}}$.

(b) En dérivant P_n montrer que $\sum kx^{k-1}$ converge vers $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ si $x \in]-1,1[$.

Application : calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-1}^{N} (2n-3)\mathrm{e}^{-3n}$.

Q17. Je connais le théorème des valeurs intermédiaires et je sais l'utiliser :

(a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Application : si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue, alors f possède au moins un point fixe sur $[0,1]$, c'est-à-dire : $\exists x_0 \in [0,1] \,/\, f(x_0) = x_0$.

(c) On admet qu'on définit une suite convergente (u_n) en posant $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - \frac{u_n^3}{2}}$.
Écrire un script `Python` fournissant une valeur approchée au dix-millième de la limite de la suite (u_n).

Q18. Je connais mes primitives usuelles et je sais déterminer des primites avec ces formules : Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$

Q19. Je sais réaliser une intégration par parties : Déterminer une primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$ (on posera $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$).

Q20. Je sais ce qu'est le degré d'un polynôme et je sais le déterminer : Déterminer le degré de $P_n = (X+1)^n + (X-1)^n - 2X^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Q21. Je connais la définition et la caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme : Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ et déterminer sa multiplicité.

Q22. Je sais montrer qu'un sous-ensemble d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel : Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des suites réelles bornées est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Q23. Je sais montrer qu'une application entre deux espaces vectoriel est une application linéaire : Montrer que l'application $\Delta : P \mapsto XP' - P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Que vaut $\Delta(1)$ et $\Delta(X)$?

Q24. Je sais montrer que deux sev sont supplémentaires : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$.
Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de E. Donner sa dimension.
Soit $W = \{(\alpha,\alpha,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que W est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
Démontrer que $E = V \oplus W$.

Q25. Je sais inverser une matrice : Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q26. Je sais montrer que deux matrices données explicitement sont semblables : Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En déduire une méthode de calcul de M^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Complexes et trigonométrie

Q27. Donner l'expression des racines n-ième de l'unité.
Montrer, pour $n \geq 2$, que la somme des racines n-ième vaut 0 et que leur produit vaut $(-1)^{n-1}$.

Q28. Soit $z \neq 1$ un complexe de module 1. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Q29. (a) Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12\mathrm{i}$.

(b) Résoudre $z^3 - (1+2\mathrm{i})z^2 + 3(1+\mathrm{i})z - 10(1+\mathrm{i}) = 0$ (observer l'existence d'une solution imaginaire pure).

(c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Q30. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Q31. Linéariser $\sin^5(\theta)$.

Q32. Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

Q33. Calculer les formules induites par le changement de variable $t = \tan(\frac{u}{2})$. Exprimer $\cos(u)$ et $\sin(u)$ en fonction de t

Q34. Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $x = \cos\varphi$.

Fonctions usuelles

Q35. Donner l'ensemble de définition et les limites aux (quatre) bords de la fonction f avec $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

Q36. Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque est $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Q37. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sg}(x)\frac{\pi}{2}$, où $\mathrm{sg}(x)$ désigne le signe de x.

Q38. Résoudre $\arcsin(x) = \arccos(2x)$.

Développement limités

Q39. Calculer le développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Q40. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ et celui à l'ordre 3 en 1 de $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Réaliser l'étude locale (tangentes) des courbes représentatives de ces fonctions respectivement au voisinage de 0 et 1.

Q41. Étude de la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x-1}}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition et les variations de f (*indication* : on pourra montrer et utiliser que pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$: $\ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$).

(b) Limites en 0^+ et interprétation graphique.

(c) Asymptote au voisinage de $+\infty$ et position relative globale.

(d) Prolongement en une fonction dérivable en 1, tangente au point d'abscisse 1 et position relative au voisinage de ce point.

(e) Tracé du graphe.

Équations différentielles

Q42. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos x$.

Q43. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.

Q44. Trouver les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, g(s+t) = g(s)g(t)$.

Probabilités

Q45. (a) Donner un exemple de trois événements indépendants deux à deux mais pas mutuellement.

(b) Montrer que si $\mathbb{P}(B) > 0$ alors : $(\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)) \Leftrightarrow (A$ et B sont indépendants).

Q46. On note X le résultat du lancer d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité de chacune des face est proportionnelle à son numéro. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

Q47. Une var X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Un compteur détraqué est censé afficher le résultat de X mais, lorsque X vaut 0 ou n il affiche à la place un nombre entier au hasard entre 1 et $n-1$. On note Y la var valant ce que le compteur défectueux affiche.

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Suites réelles, Séries

Q48. Pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, traduire avec des quantificateurs les assertions (u_n) est minorée / bornée / diverge vers $+\infty$.

Q49. Donner la définition et énoncer une caractérisation des bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

Q50. ($\star$) Si les suites de réels $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Q51. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels croissante et majorée converge vers $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Q52. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Q53. Énoncer et prouver le théorème des suites adjacentes.

Q54. Suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
Donner une expression de F_n en fonction de n et calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Q55. ($\star$) Théorème de Césaro. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente de limite ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $v_n = \displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$, converge également vers ℓ.

Q56. Étudier la nature des *séries* de termes généraux : $\displaystyle\frac{n-\sin(1/n)}{(-1)^n n + 2}$ et $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.

Fonctions, continuité, dérivabilité et convexité

Q57. Énoncer le théorème de Rolle.
($\star$) le démontrer.
Application : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment I telle que f prenne 3 fois la même valeur sur I. Montrer qu'il existe un réel α de I tel que $f''(\alpha) = 0$.

Q58. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Q59. Montrer qu'une fonction est croissante sur I si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle sur I.
Donner un exemple de fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée s'annule en 0.

Q60. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I = [a,b]$ en un réel $x \in [a,b]$.
Application : montrer que : $\exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $\displaystyle\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.
Expliciter cette inégalité pour $f = \exp$, $a = 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Q61. Montrer l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

Q62. Rappeler la définition d'une fonction convexe et sa caractérisation dans le cas où elle est deux fois dérivable.
Application :

(a) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \displaystyle\frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.
(b) Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave (ie que $-f$ est convexe) sur $]1,+\infty[$.
(c) En déduire que : $\forall (a,b) \in]1,+\infty[$, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Intégration

Q63. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in]0,\pi/2[$. (utiliser une intégration par parties)

Q64. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} |u^2-u-2|\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{|u^2-u-2|}$. (étudier le signe de u^2-u-2)

Q65. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Q66. À quelle condition sur f a-t-on : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a,b]$? Le démontrer.

Q67. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ quand $x \neq 0$. On pourra introduire une primitive de $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{t}$.
(c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{e}^x \ln 2 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{2x}\ln 2$. (distinguer suivant le signe de x)
(d) La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ? Si oui, son prolongement est-il une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Q68. Trouver la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$. (sommes de Riemann)

Q69. Trouver un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ des termes : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k+n}}$.

Polynômes

Q70. Décomposer en produits d'irréductibles X^5+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Q71. Effectuer la division euclidienne de $X^5+4X^4+2X^3+X^2-X-1$ par X^3-2X+3 après énoncé du résultat général.

Q72. Déterminer le reste dans la division euclidienne d'un polynôme P par la polynôme $(X-a)(X-b)$ où a et b sont deux réels distincts donnés. Que se passe-t-il lorsque $a=b$?
Indication : on pourra écrire la division euclidienne et l'évaluer en a et b.

Espaces vectoriels

Q73. On note $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des espaces vectoriels puis montrer que ce sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Q74. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'une espace E.
Montrer que $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
($\star$) Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Q75. Montrer que si $g\circ f$ est injective, alors f est injective (E, F deux ensembles, $f:E\to F$, $g:F\to G$).

Q76. Soit f une application linéaire sur E un espace vectoriel. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f)=\{0_E\}$.

Q77. Montrer que si $f\in\mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{Im}(f)=f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Q78. Montrer $\ker(u)\subset\ker(u\circ u)$ où $u\in\mathcal{L}(E)$. Comparer les images de u et de $u^2=u\circ u$.

Q79. Si $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,G)$ avec E, F et G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
Montrer que $(v\circ u=0)\Leftrightarrow(\mathrm{Im}\ u\subset\ker\ v)$.

Espaces vectoriels de dimension finie

Pour les questions suivantes : E, F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies où $n=\dim(E)$, $p=\dim(F)$, $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B}=(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E.

Q80. Montrer que si φ est injective alors $(\varphi(u_i))_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre de F.

Q81. Montrer que l'image d'une famille génératrice de E par φ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Q82. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si $n=p$.

Q83. Énoncer le théorème du rang.
($\star$) Le démontrer.

Q84. Soit f l'application qui à un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $P(2X+1)$.

(a) Montrer que $f(\mathbb{R}_3[X])\subset\mathbb{R}_3[X]$. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ définit par $g:P\mapsto f(x)$ (on dit que c'est l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_3[X]$).

(b) Déterminer $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Déterminer si g est injective, surjective, bijective.

Q85. Soit H un hyperplan de E, $a\in E$ tel que $a\neq 0$ et on pose $D=\mathrm{Vect}(a)$.
À quelle condition sur a a-t-on $H\oplus D=E$.
($\star$) Soit H' au autre hyperplan de E, montrer qu'il existe une droite D telle que $H\oplus D=H'\oplus D=E$. On pourra utiliser la question **Q74.**. En utilisant une récurrence descendante montrer que deux sev F et G de E possèdent un supplémentaire commun si et seulement si ils ont la même dimension.

Matrices

Q86. Donner la matrice de $s(x,y)=\left(\frac{-x-2y}{3},\frac{-4x+y}{3}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et dans la base $((1,-2),(1,1))$.

Q87. Donner la formule du produit d'une matrice $n\times p$ par une matrice $p\times r$ et effectuer un produit pour n,p et r distincts.

Q88. Calculer $(A+B)^2$ puis $A^2+2AB+B^2$ pour $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ choisies au hasard mais sans coefficient nul. Commenter.

Q89. Si $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $E_{ij}E_{k\ell}=\delta_{jk}E_{i\ell}$ pour $(i,j,k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$.
Rappel : $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant que des zéros sauf à la i^e ligne et la j^e colonne où le coefficient vaut 1.

Q90. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$.
On pourra écrire $A=2I_3+J$ où J est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 puis utiliser la formule du binôme.

Q91. Énoncer la formule de changement de base pour une application linéaire.

Q92. Calculer le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode de Gauss.

Q93. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. On développera par rapport à une ligne et l'on factorisera le résultat.

Q94. Déterminer la matrice A de la projection sur le plan d'équation $x - 2y = z$ parallèlement au vecteur $\vec{u}(1, 0, -1)$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Espaces euclidiens

Q95. Calculer la distance euclidienne du point $A(1, 2, 3)$ au plan d'une équation $x + y + z = 0$.

Q96. Soit (A, B) un couple de points du plan. Donner le lieu des points vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Q97. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose $(f \mid g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, on note $P_i(x) = x^i$.

(a) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

(b) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.

Q98. Énoncer et prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace euclidien E, y compris le cas d'égalité.

Q99. Expliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt et l'appliquer à la famille $((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, 1, 0))$ pour le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^3$.

Q100. Si F est un sous espace vectoriel de E un espace euclidien, donner la définition de $F^\perp$.
Montrer que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E.