hotline : Francois.DROUOT@gmail.com

Le tour de la PCSI en ~~80 jours~~ 100 questions

Correction

La section « *Quoi qu'il en coûte !* » est une liste (non exhaustive) d'exercices que tout le monde doit savoir faire et est à traiter dans un premier temps.

Ensuite vous trouverez une liste d'exercices qu'il faut savoir traiter, ceux indiqués du symbole ($\star$) sont plutôt pour ceux qui désirent passer comme concours : Centrale, Mines et X/ENS (où qui veulent traiter les dernières questions sur CCINP).

www.mathspc.sitew.fr

Quoi qu'il en coûte !

Q1. Je sais manipuler des nombres complexes : Mettre sous forme algébrique $z_1 = \frac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$, mettre $z_2 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique (ie. de la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$).

> **Correction :** $z_1 = \frac{(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3-\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$.
> Tout d'abord $|z_2| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$, ainsi $z_2 = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

Q2. Je connais mes formules de trigonométrie : Énoncer les formules donnant $\cos(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. En déduire les formules de $\tan(a+b)$ et $\tan(2a)$.

> **Correction :** Plus important encore que de les retenir, savoir les retrouver. Pour cela on pet utiliser l'exponentielle complexe, par exemple $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}} = \frac{\cos a+\mathrm{i}\sin a}{\cos b+\mathrm{i}\sin b} = (\cos a+\mathrm{i}\sin a)(\cos b-\mathrm{i}\sin b)$ d'une part et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)} = \cos(a-b)+\mathrm{i}\sin(a-b)$ d'autre part. Il s'ensuit $\cos(a-b) = \cos a\cos b+\sin a\sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a\cos b-\cos a\sin b$ par exemple. Pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ reprendre les formules précédentes en remplaçant b par $-b$ et en utilisant l'imparité de sin et la parité de cos. Pour $\cos 2a$ et $\sin 2a$ prendre $b=a$.
> Retrouver les formules pour la tangente s'en déduisent tout de suite : $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b} = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ en divisant numérateur et dénominateur par $\cos a\cos b$. Pour $\tan 2a$ poser $b=a$.

Q3. Je sais résoudre des équations trigonométriques : Résoudre pour $\theta\in[0,2\pi[$, $\cos(\theta)-\sqrt{3}\sin(\theta) = 1$.

> **Correction :** On tente d'identifier les coefficients devant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ comme les lignes trigonométriques d'un angle connu.
> $\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{3}\sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$.
> On a donc $\theta+\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Compte tenu de $\theta\in[0,2\pi[$ il ne reste que $\theta=0$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}+2\pi = \frac{4\pi}{3}$.
>
> *Alternative* : $\cos(\theta)-\sqrt{3}\sin(\theta) = 1 \Leftrightarrow \cos(\theta)-1 = \sqrt{3}\sin(\theta)$. On élève au carré l'équation (attention on perd l'équivalence, en effet $a=b$ implique bien $a^2=b^2$ mais la réciproque est fausse, en effet $a^2=b^2$ implique que a et b sont égaux ou opposés), on a alors une nouvelle équation qui est $\cos^2(\theta)-2\cos(\theta)+1 = 3\sin^2(\theta)$, on remplaçant $\sin^2$ par $1-\cos^2$ on tombe sur une équation de degré deux en $\cos(\theta)$, ainsi en procédant au changement de variable $X=\cos(\theta)$ on trouve $X^2-2X+1 = 3-3X^2$, ie $4X^2-2X-2=0$, ie $2X^2-X-1=0$, on remarque tout de suite que 1 est solution, l'autre solution est alors $\frac{-1}{2}$. Ainsi pour θ on trouve 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ (on cherche θ entre 0 et 2π).
> On n'oublie pas de faire la réciproque : 0 et $\frac{4\pi}{3}$ conviennent (il faut vraiment le vérifier ...) mais pas $\frac{2\pi}{3}$ (car $\cos(\frac{2\pi}{3})-\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{-1}{2}-\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\neq 1$)

Q4. Je connais ln et exp : Représenter dans un même repère orthonormé, et avec soin, les graphes de exp et ln ainsi que la première bissectrice du repère. On précisera des équations des tangentes à $\mathcal{C}_{\exp}$ en $A(0,1)$ et $B(1,\mathrm{e})$ et l'on en déduira les tangentes à $\mathcal{C}_{\ln}$ en $C(1,0)$ et $D(\mathrm{e},1)$.
Donner les différentes formules faisant intervenir ln (ainsi que les versions exp).

Correction : Ce petit contrôle de connaissance est important puisqu'il permet de récapituler les données basiques concernant les fonctions exponentielle et logarithme. Parmi ces dernières on pourra retenir :

— $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ et $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre ce qui signifie graphiquement que $\mathcal{C}_{\exp}$ et $\mathcal{C}_{\ln}$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$) lorsque le repère est orthonormé.

— Elles sont strictement croissantes de même limite $+\infty$ en $+\infty$. En revanche leurs croissances respectives ne sont pas du même type : exp croît très rapidement tandis que ln croît lentement. De façon qualitative cela est le contenu des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ pour tout $\alpha > 0$.

— On pourra aussi représenter les tangentes à $\mathcal{C}_{\ln}$ en $I(1,0)$ et à $\mathcal{C}_{\exp}$ en $J(0,1)$; et, pourquoi pas, celle en $A(1,\mathrm{e})$.

Si a et b sont dans $\mathbb{R}_+^\star$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$. Si a et b sont dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{a-b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$, $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$. Si $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.

Q5. Je connais mes fonctions usuelles : arccos, arcsin, arctan, ch et sh (on tracera l'allure du graphe, on précisera bien les domaines de définition, de dérivabilité et les expressions des dérivées).
Pour quelles valeurs de x a-t-on $\cos(\arccos(x)) = x$? et pour $\arccos(\cos(x)) = x$?

Correction : Cf cours de sup.
Attention, on a $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par contre on a $\arccos(\cos(x)) = x$ seulement pour $x \in [0,\pi]$

Q6. Je connais la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ (et de la version fonction) et je sais ce qu'on a le droit de faire et de ne pas faire avec des équivalents.

Correction : Si (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), on dit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
On peut multiplier ou diviser des équivalents et les élever à la puissance. Pour le rester il faudra procéder à la main.

Q7. Je sais démontrer une inégalité avec une étude de fonction, manipuler des sommes télescopiques et utiliser le théorème de comparaison des suites : Montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge :

(a) Montrer que : $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

(b) Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, déduire de (a) une minoration de H_n.

(c) Conclure (on remarquera que pour tout $k \geq 1$, $\ln(1+\frac{1}{k}) = \cdots$).

Correction :

(a) Pour $x \in]-1,+\infty[$, on pose $g(x) = \ln(1+x) - x$ d'où $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et strictement croissante sur $]-1,0]$. Donc g présente un maximum absolu en 0 et comme $g(0) = 0$, il suit que $g \leq 0$ ie. le résultat souhaité.

(b) D'après (a) appliquée à $x = \frac{1}{k}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ on a $\frac{1}{k} \geq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, on somme ces inégalités pour k allant de 1 à n et on obtient $H_n \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(c) On en déduit donc que $H_n \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$. La somme étant télescopique, on en déduit donc que $H_n \geq \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$. Par comparaison il suit de $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Q8. Je connais mes développements limités usuels.

Cf cours se sup.

Q9. Je sais composer des DL : Calculer le développement limité de $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ et de $x \mapsto \ln(1+\cos(x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

> **Correction :** $\ln(1+\sin(x)) = \ln(1+x-\frac{x^3}{3!}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)) = \left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3))$.
> $\ln(1+\cos(x)) = \ln(2-\frac{x^2}{2!}+\underset{x\to 0}{o}(x^3))) = \ln(2)+\ln(1-\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^3))) = \ln(2)-\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^3))$.

Q10. Je connais mes théorèmes pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 (normalisée à coefficients continues) et d'ordre 2 (à coefficient constant) : résoudre dans $\mathbb{R}$:
$(E_0)\quad y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=0\,;\ (E)\quad y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=6x\,;\ (F)\quad y''-3y'+2y=0$ et $(G)\quad y''+y'+y=0$.

> **Correction :**
> — (E_0) est une équation différentielle homogène du premier ordre à coefficients continue de la forme $y'+a(x)y=0$, si on note A une primitive de a, ses solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $C\in\mathbb{R}$. On remarque que $A : x\mapsto \ln(1+x^2)$ est une primitive de $x\mapsto \frac{2x}{1+x^2}$, ainsi les solutions de (E_0) sont les $x\mapsto C\mathrm{e}^{-\ln(1+x^2)}=\frac{C}{1+x^2}$.
> L'ensemble des solutions de (E_0) est donc $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{C}{1+x^2}\end{array},\ C\in\mathbb{R}\right\}$. Ensemble qu'on peut aussi écrire sous la forme $\mathrm{Vect}(f)$ si on note $f : x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
> — (E) est une équation différentielle du premier ordre à coefficients continue, son équation homogène associée n'est rien d'autre que (E_0). Il faut donc déterminer une solution particulière. Pour cela on peut la deviner (c'est le plus rapide) ou utiliser la méthode dite de la variation de la constante, ie qu'on cherche une solution de la forme $y_p : x\mapsto \varphi(x)\frac{1}{1+x^2}$, où φ est une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ à déterminer.
> Tout d'abord y_p est dérivable et, pour $x\in\mathbb{R}$, $y_p'(x)=\varphi'(x)\frac{1}{1+x^2}+\varphi(x)\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. On a y_p solution de (E) $\iff$ $y_p'+\frac{2x}{1+x^2}y_p=6x \iff \varphi'(x)\frac{1}{1+x^2}+\varphi(x)\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{2x}{1+x^2}\varphi(x)\frac{1}{1+x^2}=6x \iff \varphi'(x)\frac{1}{1+x^2}=6x \iff \varphi'(x)=6x+6x^3$, on remarque que $\varphi(x)=3x^2+\frac{3}{2}x^4$ convient, ainsi $y_p : x\mapsto \frac{3x^2+\frac{3}{2}x^4}{1+x^2}$ est une solution de (E). Ainsi les solutions de (E) sont les $x\mapsto y_p(x)+y_0(x)$ où y_0 est solution de (E_0). L'ensemble des solutions de (E_0) est donc $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{C+3x^2+\frac{3}{2}x^4}{1+x^2}\end{array},\ C\in\mathbb{R}\right\}$.
> — C'est une équation du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2-3r+2=0$ qui admet deux racines réelles distinctes : $r_1=1$ et $r_2=2$ comme racines. Ainsi l'ensemble des solutions de (F) est $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{x}+B\mathrm{e}^{2x}\end{array},\ (A,B)\in\mathbb{C}^2\right\}$.
> Ensemble qu'on peut aussi écrire sous la forme $\mathrm{Vect}(x\mapsto \mathrm{e}^x, x\mapsto \mathrm{e}^{2x})$.
> — C'est une équation du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2+r+1=0$ qui admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-1}{2}\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
> Comme on doit résoudre dans $\mathbb{R}$ on en déduit que les solutions sont les $x\mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(A\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+B\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Q11. Je sais à quelle condition sur les évènements A et B on a $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ou $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$, et je n'oublie pas de le signaler.

> **Correction :** Si A et B sont indépendants alors $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (c'est même la définition de l'indépendance).
> Si A et B sont incompatibles (dit autrement $A\cap B=\emptyset$) alors $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$. Dans le cas général on a : $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$ (formule de Poincaré).

Q12. Je sais modéliser une expérience et déterminer des probabilités : On pioche 10 boules dans une urne contenant 10 boules bleues et 5 boules blanches. Donner la loi de X quand :

(a) X est le nombre de boules blanches obtenues quand on procède *sans remise*;
(b) X est le nombre de boules blanches obtenues quand on procède *avec remise*.

> **Correction :** On note B_i : « la i^{e} boule extraite est blanche ».

(a) Tout d'abord $X(\Omega) \subset [\![0, 5]\!]$ puisque l'on procède sans remise. Comme le contenu de l'urne dépend du tirage précédent les tirages ne sont pas indépendants. On peut recourir à la FPC mais ceci est un peu laborieux car il faut distinguer suivant les places des boules blanches sorties. On préfère ici procéder par dénombrement : des tirages sans remise pouvant se modéliser par un tirage simultané. Il vient alors immédiatement par équiprobabilité des tirages : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{10}{10-k}}{\binom{15}{10}}$.

Remarque : nous n'avions pas affirmé $X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$ mais les calculs précédents le prouvent, ie. fournissent $\supset$. En effet, pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) > 0$ donc $k \in X(\Omega)$.

(b) Tout d'abord $X(\Omega) \subset [\![0, 10]\!]$ puisque l'on procède avec remise. L'autre inclusion découlera des calculs à suivre comme au point précédent. La situation est classique : on reconnaît le protocole d'une loi binomiale $\mathcal{B}(10, 1/3)$.

Q13. Je sais utiliser la formule des probabilités totales : Soit X et Y deux var indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ (on n'essaiera pas de simplifier la somme).

Correction : Un classique de l'usage de la formule des probabilités totales. On considère le SCE $(Y = k)_{k\in Y(\Omega)}$ et alors

$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}_{Y=k}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}_{Y=k}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k)$ par indépendance de X et Y.

Ainsi $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 p^{2k} q^{2(n-k)}$.

Q14. Je sais montrer qu'une suite est croissante et appliquer le théorème de la limite monotone : Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Correction : Si on montre que (u_n) est croissante et majorée on a gagné.

Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \dfrac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0$, ainsi (u_n) est croissante.

Pour $n \geq 1$, $u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} \leq 1$ (on peut aussi s'arrêter à $u_n \leq \frac{n}{n+1}$ et utiliser que si u_n est plus petit qu'une suite qui tend vers 1 alors u_n est plus petit que, par exemple, 2 à partir d'un certain rang, donc que (u_n) est majoré), ainsi (u_n) est majorée.

Comme (u_n) est croissante et majorée par 1 on en déduit que (u_n) converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$, comme (u_n) est majorée par 1 et clairement positive on a $\ell \in [0, 1]$.

Q15. Je sais étudier une suite définie par une relation de récurrence : Soit $a \in]0, 2]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+2}$.

(a) Montrer que la suite est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $]0, 2]$.

(b) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.

(c) Quid si $a > 2$?

Correction : On a affaire à une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{4x}{x+2}$.

(a) On remarque, pour $x \geq 0$, que (en faisant $+8-8$ au numérateur) : $f(x) = 4 - \frac{8}{x+2}$, ainsi f est croissante (c'est le but de cette remarque initiale, si vous ne le voyez pas il faut faire une rapide étude de fonction). De plus $f(0) = 0$ et $f(2) = 2$, ce qui montre que $]0, 2]$ est un intervalle stable par f, ainsi u est bien définie et à valeurs dans $]0, 2]$.

(b) Comme f est croissante on en déduit que u est monotone, comme elle est bornée elle est donc convergente vers un certain $\ell \in [0, 2]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2} = \frac{u_n(2-u_n)}{u_n+2}$, comme $u_n \in]0, 2]$ on a donc que (u_n) est croissante, comme f est continue on a que ℓ est un point fixe de f, or $f(\ell) = \ell \iff \ell = 0$ ou $\frac{4}{\ell+2} = 1 \iff \ell = 0$ ou $\ell = 2$, comme $u_0 > 0$ et comme (u_n) est croissante elle ne peut pas converger vers 0, ainsi $\ell = 2$.

(c) $]2,+\infty]$ est bien stable par f donc dans ce cas u est encore bien définie et à valeurs dans $]2,+\infty[$, le même calcul montre que u est décroissante, comme elle est minorée elle converge et c'est vers 2.
Et pour $a=0$ on a affaire à la suite constante égale à 0

Q16. Je sais manipuler des sommes géométriques :

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ sans symbole de sommation.
En déduire les conditions de convergence et la valeur de la somme de la série $\sum x^n$ puis la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}}$.

(b) En dérivant P_n montrer que $\sum kx^{k-1}$ converge vers $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ si $x \in]-1,1[$.
Application : calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-1}^{N} (2n-3)\mathrm{e}^{-3n}$.

Correction :

(a) $P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $P_n(1) = n+1$.
Il suit que la série géométrique converge pour $|x|<1$ et qu'alors sa somme est $\frac{1}{1-x}$.
Application : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ cette série géométrique est de raison $\frac{4}{3} > 1$ donc diverge (grossièrement).

(b) P_n est une fonction polynomiale donc est dérivable et $P_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
Avec 1°, on a aussi $P_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2}$ (si $|x|<1$) par croissance comparée.
On en déduit donc que la série géométrique dérivée première de raison x, $\sum kx^{k-1}$, converge si et seulement si $|x|<1$ et que dans ce cas sa somme est $\frac{1}{(1-x)^2}$.
Application : On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(2n-3)\mathrm{e}^{-3n} = 2\mathrm{e}^{-3}\sum_{n=0}^{N} n\left(\mathrm{e}^{-3}\right)^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{N}\left(\mathrm{e}^{-3}\right)^n$ par linéarité de la somme. On reconnaît alors deux séries géométriques de raison $\mathrm{e}^{-3} \in]-1,1[$, donc convergentes, dont une série dérivée première. Grâce aux formules précédentes on obtient : $\displaystyle\sum_{n=-1}^{+\infty}(2n-3)\mathrm{e}^{-3n} = (-2-3)\mathrm{e}^3 + \frac{2\mathrm{e}^{-3}}{(1-\mathrm{e}^{-3})^2} - \frac{3}{1-\mathrm{e}^{-3}}$.

Q17. Je connais le théorème des valeurs intermédiaires et je sais l'utiliser :

(a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Application : si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue, alors f possède au moins un point fixe sur $[0,1]$, c'est-à-dire : $\exists x_0 \in [0,1] \,/\, f(x_0) = x_0$.

(c) On admet qu'on définit une suite convergente (u_n) en posant $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - \frac{u_n^3}{2}}$.
Écrire un script `Python` fournissant une valeur approchée au dix-millième de la limite de la suite (u_n).

Correction :

(a) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a,b]$, si k est entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

(b) Il s'agit bien évidemment d'appliquer le TVI, reste à trouver la fonction. La voici : $g : x \mapsto f(x) - x$ dont on veut montrer qu'elle s'annule sur $I = [0,1]$. Cette fonction est bien continue par somme, et $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1) - 1$. Il suffit alors de montrer que $g(0)$ et $g(1)$ n'ont pas même signe. Une hypothèse n'a pas encore été utilisée à ce stade, tout dépendra donc d'elle : $f([0,1]) \subset [0,1]$ ie. $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$.
En particulier $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$ ainsi $g(1) \leq 0$. La conclusion est atteinte.
Remarque : cela signifie que le graphe de f est contenu dans le carré de côté 1 du $\frac{1}{4}$ de plan supérieur droit et qu'il intersecté sa diagonale portée par $(\delta) : y = x$; grâce à la continuité de f.

(c) (u_n) converge. Comme $f : x \mapsto \sqrt{1-x^3/2}$ est continue sur $[-1,1]$ et que $f([0,1]) \subset [0,1]$, la limite ℓ de u vérifie $f(\ell) = \ell$ ie. c'est un point fixe de f sur $[0,1]$. En Python on peut rédiger l'algorithme de dichotomie :

```
def g(x):
    return sqrt(1-x**3/2)-x
a,b,eps = 0,1,0.0001
while (b-a)>=eps:
    m = (b+a)/2
    if g(m)*g(b)<0:
        a = m
    else:
        b = m
print('la limite de u au dix-millieme près est ',m)
```

Q18. Je connais mes primitives usuelles et je sais déterminer des primites avec ces formules : Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$

Correction : $F : x \mapsto 2\sqrt{x^2+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
$G : x \mapsto \ln|\ln(x)|$ est une primitive de g sur $]0,1[$ (et sur $]1,+\infty[$).

Q19. Je sais réaliser une intégration par parties : Déterminer une primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$ (on posera $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$).

Correction : C'est l'un des cadres standard d'application de l'IPP.
Par le théorème fondamentale de l'analyse, comme $f : t \mapsto t\mathrm{e}^{2t}$ est continue, on a bien que F est une primitive de f (c'est même la primitive de f qui s'annule en 0).
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $u : t \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$ (ainsi $u' : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$) et $v : t \mapsto t$ (ainsi $v' : t \mapsto 1$), les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ (où $[x,0]$), ainsi par intégration par parties on a : $F(x) = \left[\dfrac{t\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{2x} - \left[\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^x = \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{4}$.

Q20. Je sais ce qu'est le degré d'un polynôme et je sais le déterminer : Déterminer le degré de $P_n = (X+1)^n + (X-1)^n - 2X^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Tout d'abord $P_0 = 0$, ainsi $\deg(P_0) = -\infty$, $P_1 = 0$, ainsi $\deg(P_1) = -\infty$.
Pour $n \geq 2$, comme P_n est la somme de trois polynômes de degré n, ainsi $\deg(P_n) \leq n$. Or (formule du binôme de Newton) on a $(X+1)^n = X^n + nX^{n-1} + \binom{n}{2}X^{n-2} + \ldots$ et $(X-1)^n = X^n - nX^{n-1} + \binom{n}{2}X^{n-2} + \ldots$, ainsi les termes en X^n et en X^{n-1} se simplifient, le terme de plus haut degré est donc $2\binom{n}{2}X^{n-2} = n(n-1)X^{n-2}$.
Ainsi $\deg(P_n) = n-2$.

Q21. Je connais la définition et la caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme : Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ et déterminer sa multiplicité.

Correction : Définition : a est racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité m si $(X-a)^m$ divise P mais $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P.
Ainsi (c'est juste une reformulation) : a est racine de P de multiplicité m <u>ssi</u> il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$.
Caractérisation : a est racine de P de multiplicité m <u>ssi</u> $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

On a $P(1) = 0$, on a $P' = 5X^4 - 12X^3 + 6X^2 - 2X + 3$, ainsi $P'(1) = 0$, on a $P'' = 20X^3 - 36X^2 + 12X - 2$, ainsi $P''(1) = -6 \neq 0$. Donc 1 est racine double de P.
Alternative : On remarque que $P(1) = 0$, on a on fait la division euclidienne de P par $X-1$ et on trouve $P = (X-1)Q_1$ avec $Q_1 = X^4 - 2X^3 - X + 2$, comme $Q_1(1) = 0$ on fait la division euclidienne de Q_1 par $X-1$ et on trouve $Q_1 = (X-1)Q_2$ avec $Q_2 = X^3 - X^2 - X - 2$, comme $Q_2(1) = -3 \neq 0$, on en déduit que $P = (X-1)^2 Q_2$ avec $Q_2(1) \neq 0$ ainsi 1 est racine double de P.

Q22. Je sais montrer qu'un sous-ensemble d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel : Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des suites réelles bornées est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

> **Correction :** Par le critère de sev : $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un ev de référence. De plus la suite nulle est bornée donc $\mathcal{B}$ est non vide. Reste à s'assurer de la stabilité par combinaison linéaire. Pour ce faire, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(u,v) \in \mathcal{B}^2$. Posons $w = \lambda u + v$ la suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ combinaison linéaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| = |\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| \cdot |u_n| + |v_n|$ par l'inégalité triangulaire. Comme u et v sont bornées, il existe $(U,V) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_n| \leq U$ et $|v_n| \leq V$. Il s'ensuit que la suite w est bornée par $|\lambda|U + V$ donc appartient à $\mathcal{B}$.
> Conclusion : $\mathcal{B}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'après le critère de sev.

Q23. Je sais montrer qu'une application entre deux espaces vectoriel est une application linéaire : Montrer que l'application $\Delta : P \mapsto XP' - P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Que vaut $\Delta(1)$ et $\Delta(X)$?

> **Correction :** Tout d'abord Δ est bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
> Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\Delta(P + \lambda Q) = X(P + \lambda Q)' - (P + \lambda Q) = XP' - P + \lambda(XQ' - Q) = \Delta(P) + \lambda\Delta(Q)$, ce qui montre bien que Δ est linéaire.
> On a $\Delta(1) = X.0 - 1 = -1$ et $\Delta(X) = X.1 - X = 0$.

Q24. Je sais montrer que deux sev sont supplémentaires : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$.
Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de E. Donner sa dimension.
Soit $W = \{(\alpha,\alpha,\alpha),\, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que W est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
Démontrer que $E = V \oplus W$.

> **Correction :** Quand un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est donné par un système d'équations il est facile d'en déduire son écriture comme un Vect.
> $(x,y,z) \in V \Leftrightarrow z = -x - y$ donc $V = \{(x,y,-x-y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$ donc V est un sev de $E = \mathbb{R}^3$.
> La famille génératrice précédente est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc est libre par suite c'est une base de V et donc $\dim V = 2$. Directement $W = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ donc W est un sev de dimension 1 de E.
> Il y a plusieurs voies pour montrer $E = F \oplus G$:
> - montrer que tout (x,y,z) s'écrit de façon con unique comme somme de $v + w$ où $v \in V$ et $w \in W$.
> - montrer que $V + W$ est de dimension 3 ie. ici que $V \cap W = \{0\}$ (le plus facile ?)
> - ou encore de montrer que la concaténation de bases de V et W est une base de E. Pour cela on peut calculer le déterminant de la matrice 3×3 correspondante et montrer qu'il est non nul, ou bien montrer que $(1,1,1)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$. Par exemple $(1,1,1) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1) \Rightarrow \alpha = \beta = 1$ absurde. Ou encore plus rapide $(1,1,1)$ n'est pas dans le plan V (évidente puisque $1+1+1 = 3 \neq 0$).

Q25. Je sais inverser une matrice : Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

> **Correction :** Plusieurs possibilités ici vu la forme de la matrice.
> (a) On applique l'algorithme de Gauss-Jordan dont on ne donne que les étapes (possibles) : $L_2 \leftarrow L_2 - L_3 ; L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 ; L_3 \leftarrow \frac{L_3 - L_2}{4}$ à ce stade la matrice est triangulaire supérieure sans coefficient diagonal nul donc est inversible de même que A. On poursuit par $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et on finit avec $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2 - L_3)$.
> (b) On écrit $M = J + I$ où J est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1.
> Alors $M^2 = (J+I)^2 = J^2 + 2J + I$ car I commute avec J.
> Or $J^2 = 3J$ donc $M^2 = 5J + I = 5M - 4I$ donc $M(M - 5I) = -4I$ d'où $M\left[\frac{1}{4}(5I - M)\right] = I$. Dont il suit que M est inversible d'inverse $\frac{1}{4}(5I - M)$.
>
> dans les deux cas on a trouvé $M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Q26. Je sais montrer que deux matrices données explicitement sont semblables : Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En déduire une méthode de calcul de M^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Correction : On traduit l'énoncé : on cherche trois vecteurs tels que $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = -e_2$ et $f(e_3) = e_2 - e_3$.
Pour e_1, on peut déterminer $\ker(f)$ à l'aide de M et en choisir un vecteur ou directement poser $e_1 = (1, 0, 1)$ qui fait clairement l'affaire.
Pour e_2 on résout $MX = -X \Rightarrow (M + I)X = 0$, par exemple avec la méthode du pivot, ou plus directement avec L_1 qui donne $z = 0$ puis $x + y = 0$ donc $e_2 = (1, -1, 0)$ convient (il est aussi indépendant de e_1).
Pour e_3 de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique, on résout $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e_2 - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (M+I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e_2$.
De façon générale on arrive avec la méthode du pivot à $z = 1$ et $x + y = 2$ d'où, par exemple, $e_3 = (1, 1, 1)$. Il faut alors vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base ie. que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, soit en calculant le déterminant correspondant soit en montrant que e_3 ne peut pas s'exprimer comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 car cela mène à un système linéaire sans solution.
La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est $P = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $M = PTP^{-1}$.
Une récurrence élémentaire donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PT^nP^{-1}$. Ramenant le problème du calcul de M^n à celui de la matrice plus « simple » T^n. Comme T est triangulaire supérieure on connaît les coefficients diagonaux de T^n. La première ligne de T étant nulle, celle de T^n l'est aussi pour tout $n > 0$. Reste à deviner le coefficient de la 2$^{\text{e}}$ ligne en dernière colonne, ce que l'on fait en calculant les premières puissances de T : pour T^1 c'est 1, pour T^2 c'est -2, pour T^3 c'est 3 ...
On montre alors par récurrence que ce coefficient de T^n est $(-1)^{n+1}n$.
On revient à M^n par changement de base qui ne repose plus que sur deux multiplications matricielles : $M^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 2-n & 1-n & n-2 \\ n & n+1 & -n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. À la fin de « tant » de calculs il « faut » vérifier (au moins)pour $n = 1$.

Complexes et trigonométrie

Q27. Donner l'expression des racines n-ième de l'unité.
Montrer, pour $n \geq 2$, que la somme des racines n-ième vaut 0 et que leur produit vaut $(-1)^{n-1}$.

Correction : L'ensemble de racines n-ième de l'unité est $\mathbb{U}_n = \{\zeta^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $\zeta = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.
Pour calculer la somme des racines n-ième il y a pleins de manières de le démontrer, en voici trois :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \frac{1-\zeta^n}{1-\zeta} = 0$ (car $\zeta \neq 1$ pour $n \geq 2$ et $\zeta^n = 1$).

(b) Les racines n^e de l'unité sont les racines de $z^n - 1 = 0$, or (relations coefficients/racines) le coefficient devant z^{n-1} de ce polynôme est l'opposé de la somme de ses racines, d'où le résultat.

(c) On utilise l'identité remarquable $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ pour $a = \zeta$ et $b = 1$, ainsi $\zeta^n - 1 = (\zeta - 1)(\zeta^{n-1} + \ldots + \zeta + 1)$, comme $\zeta^n - 1 = 0$ et $\zeta - 1 \neq 0$ on en déduit que $(\zeta^{n-1} + \ldots + \zeta + 1) = 0$.

Pour le produit en voici deux :

(a) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n-1} 2\mathrm{i}k\pi/n} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\frac{(n-1)n}{2}} = (-1)^{n-1}$ (car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$).

(b) Les racines n-ième de l'unité sont les racines de $z^n - 1 = 0$, or (relations coefficients/racines) le coefficient constant est $(-1)^n$ multiplié par le produit de ses racines, d'où le résultat.

Q28. Soit $z \neq 1$ un complexe de module 1. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Correction : Tout d'abord il est bon d'avoir différentes manières de montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur :

— Z est réel si et seulement si $\text{Im}(Z) = 0$ si et seulement si $\text{Arg}(Z) \equiv 0\,[\text{mod } \pi]$ (ou congru à 0 ou π modulo 2π) si et seulement si $Z = \overline{Z}$.

— Z est imaginaire pur si et seulement si $\text{Re}(Z) = 0$ si et seulement si $\text{Arg}(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\text{mod } \pi]$ si et seulement si $Z = -\overline{Z}$.

Posons $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$. On sait que Z est imaginaire pur si et seulement si $Z + \overline{Z} = 0$, de plus $|z| = 1$ équivaut à $z\overline{z} = 1$. On a : $\frac{z+1}{z-1} + \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{z+1}{z-1} + \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = \frac{z+1}{z-1} + \frac{z\overline{z}+z}{z\overline{z}-z} = \frac{z+1}{z-1} + \frac{1+z}{1-z} = 0$, ainsi Z est bien imaginaire pur.

Q29. (a) Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12\text{i}$.

(b) Résoudre $z^3 - (1+2\text{i})z^2 + 3(1+\text{i})z - 10(1+\text{i}) = 0$ (observer l'existence d'une solution imaginaire pure).

(c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Correction :

a) Soit $z = 5 - 12\text{i}$. $|z|^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. Cependant on ne connaît pas (moi tout du moins) de nombre dont le cosinus vaut $\frac{5}{13}$ et le sinus $\frac{12}{13}$. On poursuit donc le calcul en coordonnées algébriques, on sait qu'il existe deux réponses (opposées) à la question. On cherche $Z = x + \text{i}y$ tel que $Z^2 = z$ ie. $x^2 - y^2 = 5$ et $2xy = -12$. Pour continuer le calcul on peut substituer le y de la deuxième équation dans la première et obtenir une équation bicarré qu'on sait résoudre, ou on peut utiliser l'astuce qui consiste a rajouter en troisième équation $|Z^2| = |z|$, ie. $x^2 + y^2 = 13$. Ce qui permet d'avoir tout de suite $x^2 = 9$ et $y^2 = 4$, l'équation $xy = -6$ permet de conclure que les solutions sont $\pm(3 - 2\text{i})$.

Remarque : A priori il faudrait une réciproque (en effet on a seulement montré : Si Z solution alors $Z = \pm(3 - 2\text{i})$), cependant on sait qu'il y a exactement deux solutions, la réciproque est automatique.

b) On suit l'indication en cherchant une racine de la forme $a\text{i}$ où $a \in \mathbb{R}$: on remplace, on développe et l'on identifie parties réelle et imaginaire pour avoir a solution de $a^2 - 3a - 10 = 0$ et de $-a^3 + 2a^2 + 3a - 10 = 0$. La première équation implique $a \in \{5; -2\}$. La seconde ne laisse que $a = -2$.

On factorise alors $P(z) = z^3 - (1+2\text{i})z^2 + 3(1+\text{i})z - 10(1+\text{i})$ par $z + 2\text{i}$ (division euclidienne) pour se ramener à la résolution du quotient : $Q(z) = z^2 - (1+4\text{i})z + 5(\text{i} - 1)$. Ce dernier a pour discriminant $\Delta = 5 - 12\text{i}$ (comme de part hasard)

Il s'ensuit que les racines de Q sont $\frac{(1+4\text{i})\pm(3-2\text{i})}{2}$ ie. $\frac{4+2\text{i}}{2} = 2 + \text{i}$ et $\frac{-2+6\text{i}}{2} = -1 + 3\text{i}$.

c) Ce triangle peut être de quelconque à équilatéral en passant par isocèle et rectangle. Tracer les points A, B et C d'affixes les racines de P n'est certainement pas une mauvaise idée : ABC semble être rectangle isocèle en $B(2+\text{i})$. On le vérifie alors en calculant les longueurs des sommets et en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore.

Alternative : on peut aussi utiliser que l'angle est droit en B si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in \text{i}\mathbb{R}$ par exemple.

Q30. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Correction : Comme souvent lorsque des formules analogues pour cos et sin sont demandées, tenter de faire d'une pierre deux coups en utilisant l'exponentielle complexe. Ici par exemple, il suffit de remarquer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + \text{i}\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \text{e}^{\text{i}k\theta}$. Cette dernière somme est géométrique donc explicitable et les deux sommes initiales s'en déduisent par identification de ses parties réelle et imaginaire.

$$\sum_{k=0}^{n} \exp(\text{i}k\theta) = \frac{1 - \text{e}^{\text{i}(n+1)\theta}}{1 - \text{e}^{\text{i}k\theta}} = \frac{\text{e}^{\text{i}\theta(n+1)/2}\left(\text{e}^{-\text{i}(n+1)\theta/2} - \text{e}^{\text{i}(n+1)\theta/2}\right)}{\text{e}^{\text{i}\theta/2}\left(\text{e}^{-\text{i}\theta/2} - \text{e}^{\text{i}\theta/2}\right)} = \text{e}^{\text{i}n\theta/2}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Il s'ensuit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \text{Re}\left(\text{e}^{\text{i}n\theta/2}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et de même on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Q31. Linéariser $\sin^5(\theta)$.

Correction : Du grand classique : $\sin^5\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5$.
On développe avec la formule du binôme de Newton (revoir le triangle de Pascal si nécessaire pour le calcul des coefficients binomiaux).
$\sin^5\theta = \frac{1}{2^5 i}\left(e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}\right) = \frac{-i}{2^5}\left(2i\sin 5\theta - 10i\sin 3\theta + 20i\sin\theta\right)$.
Et finalement $\sin^5\theta = \frac{1}{16}\sin 5\theta - \frac{5}{16}\sin 3\theta + \frac{5}{8}\sin\theta$.
Remarque : il peut être utile de vérifier la cohérence de la formule obtenue. Ici par exemple pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Q32. Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

Correction : À partir de la formule de Moivre, des formules d'Euler et du binôme ; un classique :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{5i\theta}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^5\right]\\ &= \mathrm{Re}\left[\cos^5(\theta) + 5i\cos^4(\theta)\sin(\theta) + 10i^2\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 10i^3\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5i^4\cos(\theta)\sin^4(\theta) + i^5\sin^5(\theta)\right]\\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\end{aligned}$$

Remplacer alors $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$, développer, simplifier. Pour ainsi obtenir : $\cos(5\theta) = P_5(\cos(\theta))$ où $P_5(X) = X^5 - 10X^3(1-X^2) + 5X(1-X^2)^2 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$.

Q33. Calculer les formules induites par le changement de variable $t = \tan(\frac{u}{2})$. Exprimer $\cos(u)$ et $\sin(u)$ en fonction de t

Correction : $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \Leftrightarrow 2\arctan t = u$. On a donc $\mathrm{d}u = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
$\cos u = \cos\left(2\frac{u}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)(1-t^2)$. Or $1+\tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$ ie. $\cos^2 u = \frac{1}{1+t^2}$ donc $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
De la même manière on obtient $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$.

Q34. Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $x = \cos\varphi$.

Correction : On doit déjà vérifier que ce changement de variable est licite : est-ce bien une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$? Oui.
De plus, $\mathrm{d}x = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Quant aux bornes elles sont respectivement transformées en $\frac{\pi}{2}$ et 0. On a donc : $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}(-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(1-\cos\varphi)^2}{1-\cos^2\varphi}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Comme le sinus est positif sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ on en déduit que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos\varphi)\sin\varphi}{\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi = \Big[\varphi - \sin\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

Fonctions usuelles

Q35. Donner l'ensemble de définition et les limites aux (quatre) bords de la fonction f avec $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Correction : Comme toujours lorsque l'exposant n'est pas entier, il convient de revenir à la définition : $f(x) = \exp\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. Donc $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $1+\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et ($x < -1$ ou $x > 0$). En conclusion : $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
On recourt ensuite à l'outil très performant dès qu'il s'agit de calculer une limite des équivalent : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{u} u$ en 0 ici utilisé avec $u = 1/x$ lorsque $x \to +\infty$. Par produit il vient $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{1}{x} = 1$ donc, en composant avec exp qui est continue en 1, il vient $\lim\limits_{+\infty} f = e^1 = e$.
Les calculs sont les mêmes au voisinage de $-\infty$ pour trouver $\lim\limits_{-\infty} f = e$.
En 0^+ : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$ puis par produit et croissance comparée et enfin composition avec exp qui est continue en 0 : $\lim\limits_{0^+} f = e^0 = 1$.

Enfin en -1^- : $\lim\limits_{x\to -1^-} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ par composition et produit. On conclut en composant une nouvelle fois car $\lim\limits_{+\infty}\exp = +\infty = \lim\limits_{-1^-} f$.

Q36. Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque est $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Correction : On peut faire les deux choses en une en montrant que $\mathrm{sh}\circ f = f\circ \mathrm{sh} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ en notant f la fonction proposée dans l'énoncé. Bien sûr le théorème de la bijection monotone assure que sh soit bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Mais cette méthode présente l'inconvénient de devoir connaître à priori l'expression de la bijection réciproque.
Autre possibilité : résoudre $\mathrm{sh}\, x = y$ où y est un réel fixé et x est une inconnue réel. Optons ici pour cette dernière :

$$y = \mathrm{sh}\, x \Leftrightarrow 2y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 2y = \mathrm{e}^x - 1/\mathrm{e}^x \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0.$$

Ce trinôme du 2nd degré en e^x a pour discriminant $\Delta = 4(y^2+1) > 0$ donc $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$ l'autre racine est écartée car $\mathrm{e}^x > 0$. Le résultat est atteint en passant au logarithme : $\mathrm{sh}^{-1}(y) = x = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$.

Q37. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sg}(x)\frac{\pi}{2}$, où $\mathrm{sg}(x)$ désigne le signe de x.

Correction : Le membre de gauche définit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$.
Danger ! Ne pas conclure à la constance de f sur $\mathbb{R}^*$: c'est vrai sur tout **intervalle** de cet ensemble mais pas globalement ! Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_-^\star$ et sur $\mathbb{R}_+^\star$. Reste à vérifier à déterminer ces constantes. Pour cela on peut calculer les limites en $\pm\infty$. De $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ et $\arctan 0 = 0$ on tire $\lim\limits_{+\infty} f = \dfrac{\pi}{2}$. De même pour la limite en $-\infty$ qui fournit le résultat escompté.

Q38. Résoudre $\arcsin(x) = \arccos(2x)$.

Correction : Il convient tout d'abord de savoir sur quel ensemble on cherche des solutions : l'ensemble de définition de l'équation. arcsin est définie sur $[-1,1]$ de même que arccos. On résout donc $-1 \le 2x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$. Par intersection des ensembles de définition des termes on résout l'équation sur $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
De plus, arcsin est à valeur dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel cos est ≥ 0 donc $\cos\arcsin x \ge 0$.
Si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est une solution alors $\cos\arcsin x = 2x$ (ce n'est pas une équivalence). Et $\cos\arcsin x = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}$ car $\cos\arcsin \ge 0$ d'où $\cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}$.
On résout donc $\sqrt{1-x^2} = 2x$ sur I. Comme une racine carré est positive, on se restreint à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ensemble sur lequel l'équation équivaut à $1-x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}$. N'ayant pas raisonné par équivalence il faut vérifier que $\frac{\sqrt{5}}{5} \le \frac{\pi}{2}$ puis qu'il s'agit bien d'une solution avant de pouvoir annoncer $\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

Développement limités

Q39. Calculer le développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Correction : On peut utiliser la formule de Taylor mais cela est lourd pour un ordre « élevé ». On préfèrera comme d'habitude les règles de calcul avec les DL : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} + \underset{x\to0}{o}(x^6)\right) \times \dfrac{1}{1-\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \underset{x\to0}{o}(x^6)\right)} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \underset{x\to0}{o}(x^6)$.
On a utilisé ci-dessus la formule $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^6 + \underset{u\to0}{o}(u^6)$.

Alternative : La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^6$ sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle possède donc un DL à l'ordre 6 en 0, comme elle est impaire il est de la forme $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to0}{o}(x^6)$, où a, b, c sont trois réels que l'on va déterminer (cela découle de l'unicité du DL, en effet si on a un DL en 0, $tan(x) = -\tan(-x)$ donne un second DL). Or $\tan(x)\cos(x) = \sin(x)$, ainsi on a $(ax+bx^3+cx^5+\underset{x\to0}{o}(x^6))(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\underset{x\to0}{o}(x^6)) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to0}{o}(x^6)$,

> on développe le membre de gauche et on invoque l'unicité des DL pour obtenir un système d'équations vérifiées par a, b et c, en le résolvant on détermine ces trois valeurs.
> *Alternative 2* : On sait que tan possède un DL à l'ordre 6 (même argument qu'à la question précédente), comme $\tan' = 1+\tan^2$ on peut avec cette formule gagner des ordres, par exemple si on ne sait que $\tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ alors $\tan'(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ donc en intégrant (et en utilisant que $\tan(0) = 0$) on a : $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$, il ne reste plus qu'à ré-itérer.

Q40. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ et celui à l'ordre 3 en 1 de $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
Réaliser l'étude locale (tangentes) des courbes représentatives de ces fonctions respectivement au voisinage de 0 et 1.

> **Correction :** $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ et donc $\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) = \exp(1 - x + x^2 + o(x^2)) = \mathrm{e}^1\mathrm{e}^{-x+x^2+o(x^2)}$.
> Comme $-x + x^2 \to 0$ quand $x \to 0$ et $\exp u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ au voisinage de 0, on peut composer ces DL pour avoir $f(x) = \mathrm{e}\left(1 - x + x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \mathrm{e}\left(1 - x + \frac{3}{2}x^2\right) + o(x^2)$.
> *Graphiquement :* $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0, \mathrm{e})$ (information déduite de l'ordre 0), sa tangente en ce point a pour équation réduite $y = \mathrm{e}(1 - x)$ (son coefficient directeur est donc de $-\mathrm{e}$; provient de l'ordre 1) et enfin le signe de $f(x) - \mathrm{e}(1 - x)$ est celui de $\frac{3\mathrm{e}}{2}x^2 > 0$ donc la courbe est au dessus de sa tangente.
> Pour un DL en $x = 1$ on se ramène en 0 par le changement de variable $x = y+1$, point en lequel nous disposons de plus de formules de DL. Ainsi donc $g(x) = \frac{\ln(y+1)}{y+1}$ avec $y \to 0$. Alors $g(x) = \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right) \times \left(1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3)\right)$.
> On développe et l'on tronque à l'ordre 3 pour avoir $g(x) = y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{11}{6}y^3 + o(y^3)$.
> On revient enfin à la variable initiale : $g(x) = (x - 1) - \frac{3}{2}(x - 1)^2 + \frac{11}{6}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3)$.
> *Graphiquement :* le graphe de g passe par le point $A(1, 0)$, sa tangente en ce point est d'équation réduite $y = x - 1$ et leur position relative est régie par le signe de la différence de leurs équations respectives donc par celui de $\frac{11}{6}(x - 1)^3$. Pour $x < 1$ cette quantité est < 0 et > 0 pour $x > 1$. Le graphe de g présente donc en A un point d'inflexion.

Q41. Étude de la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x-1}}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition et les variations de f (*indication* : on pourra montrer et utiliser que pour $x \in \mathbb{R}_+^\star : \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$).
(b) Limites en 0^+ et interprétation graphique.
(c) Asymptote au voisinage de $+\infty$ et position relative globale.
(d) Prolongement en une fonction dérivable en 1, tangente au point d'abscisse 1 et position relative au voisinage de ce point.
(e) Tracé du graphe.

> **Correction :**
> (a) On a $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}\ln(x)}$ qui est définie pour $x > 0$ et $x \neq 1$, ainsi $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
> (b) f est dérivable (composée de fonctions qui le sont) sur D_f et pour $x \in D_f$ on a $f'(x) = \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\ln(x) + \frac{1}{(x-1)x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}\ln(x)} = \frac{1}{(x-1)^2 x}(x - 1 - x\ln(x))\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}\ln(x)}$, f' est du signe de la quantité entre parenthèse, ainsi $f'(x) \leq 0 \iff x - 1 - x\ln(x) \leq 0 \iff \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$, il ne reste plus qu'à montré cette inégalité : Posons $g : x \mapsto \ln(x) - \frac{x-1}{x} = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x > 0$ on a $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x}$, ainsi g est décroissante puis croissante, elle admet donc un minimum 1 qui vaut $g(1) = 0$, ainsi g est à valeurs positives, ce qui montre que $\ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$ pour tout $x > 0$, ainsi $f' \leq 0$ et donc f est décroissante sur $]0, 1[$ et est décroissante sur $]1, +\infty[$.
> (c) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, on a donc une asymptote verticale en 0.
> (d) On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ (par croissance comparées et continuité de l'exponentielle en 0), on a donc une horizontale en $+\infty$, comme la fonction est décroissante sur $]1, +\infty[$, la courbe est dessus, c'est encore le cas sur $]0, 1[$ (cf. question suivante).
> (e) Comme $\ln(x) = \ln(1 + x - 1) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$, on a $\frac{1}{x-1}\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} 1$, ainsi f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \mathrm{e}$. Pour terminer on fait un DL en 1, pour cela on pose $x = 1 + h$ (ainsi $x \to 1 \iff h \to 0$) : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}\ln(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{h}\ln(1+h)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{h}\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \underset{h\to 0}{o}(h^3)\right)} = \mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \underset{h\to 0}{o}(h^2)} =$

$\mathrm{e}\left(1+\left(-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+\underset{h\to 0}{o}(h^2)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}\right)^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2)\right)=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}h+\frac{11\mathrm{e}}{24}h^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2)=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)+\frac{11\mathrm{e}}{24}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}((x-1)^2)$. Ainsi la tangente au point d'abscisse 1 à pour équation $y=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)$ et la courbe est au dessus de sa tangente (car $f(x)-\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)$ est du signe $\frac{11\mathrm{e}}{24}(x-1)^2$ dans un voisinage de 1).

(f) À dessiner.

Équations différentielles

Q42. Résoudre l'équation différentielle $y'+y=x-\mathrm{e}^x+\cos x$.

Correction : Cette équation différentielle est linéaire du premier ordre à coefficients constants et n'est pas homogène. On la note (E).

On commence par résoudre l'équation homogène associée : $y'+y=0$. Rappel mnémotechnique (sous la contrainte que y ne s'annule pas) : $y'/y=-1 \Leftrightarrow (\ln|y|)'=-1 \Leftrightarrow \ln|y|=-x+C'$ où $C'\in\mathbb{R}$ (à éviter dans une copie). Donc $y=C\exp(-x)$ en mettant le signe dans la constante $C\in\mathbb{R}$. Il reste à trouver une solution particulière à l'équation initiale. Vu la forme du second membre on pense à la superposition des solutions. Pour x : on prend une fonction polynôme du degré le plus petit possible : un. On prend de tête $x\mapsto x-1$. Pour e^x : $x\mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ a l'air intéressant. Enfin pour $\cos x$: on pense de même à $x\mapsto \frac{1}{2}(\sin(x)+\cos(x))$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-x}+x-1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\end{array}, C\in\mathbb{R}\right\}$.

Q43. Résoudre l'équation différentielle $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x$.

Correction : On résout cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants non homogène sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est de polynôme caractéristique $X^2-3X+2=0$. Ce dernier possède deux racines $r_1=1$ et $r_2=2$ (on les trouve d'ailleurs de tête par « somme et produit »). Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est engendré par $x\mapsto \mathrm{e}^x$ et $x\mapsto \mathrm{e}^{2x}$.

Reste à trouver une solution particulière. On essaie *a priori* une fonction de la forme $h(x)=P(x)\mathrm{e}^x$ où $P(x)$ est un polynôme de degré ≤ 1 (comme inutile de cherche P de la forme $x\mapsto ax+b$, en effet on sait que $x\mapsto b\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation homogène, on va donc chercher P de la forme $x\mapsto ax$). Après calculs on trouve que $P(x)=-x$ convient.

En conclusion : l'ensemble des solutions à l'équation différentielle proposée est $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^x+\mu\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^x\end{array}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Q44. Trouver les fonctions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2, g(s+t)=g(s)g(t)$.

Correction : Noter que l'on en connaît déjà une : exp. Il serait heureux que cette fonction apparaisse dans notre conclusion.

En fait cette relation fonctionnelle est vérifiée par toutes les fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ où $\alpha\in\mathbb{C}$.

On écarte dans la suite de l'étude la fonction nulle qui est évidemment solution du problème posé.

On va prouver qu'il n'y a pas d'autre solution que celles ci-dessus.

Pour cela on procède en plusieurs étapes. Soit g une telle fonction (qu'on suppose non nulle).

1° *g ne s'annule jamais.*

Sinon soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $g(x)=0$. Alors pour tout $y\in\mathbb{R}$, $g(y)=g(y-x)g(x)=0$ donc $g=0$ ce qui a été exclus.

2° $g(0)=g(0+0)=g(0)^2$ et, d'après 1°, il ne reste que $g(0)=1$ comme possibilité.

3° Pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$, $g(x+h)=g(x)g(h)$ donc $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{g(x)(g(h)-1)}{h}=g(x)\frac{g(0+h)-g(0)}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow} g(x)g'(0)$.

Par unicité de la limite $g'(x)=g(x)g'(0)$. Posons $\alpha=g'(0)$. Si $\alpha=0$ alors g est constante.

Sinon g est solution de l'équation différentielle $g'=\alpha g$ dont on sait qu'elle a pour solutions les fonctions $g(x)=C\mathrm{e}^{\alpha x}$ où $C\in\mathbb{C}$. Comme on a $g(0)=1$ alors $C=1$. D'où la conclusion :

Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant la relation fonctionnelle $g(s+t)=g(s)g(t)$ sont $x\mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ où $\alpha\in\mathbb{C}$.

Remarque : toutes les fonctions dont on avait noté qu'elles étaient solution se retrouvent bien dans cet ensemble.

Probabilités

Q45. (a) Donner un exemple de trois événements indépendants deux à deux mais pas mutuellement.
(b) Montrer que si $\mathbb{P}(B) > 0$ alors : $(\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)) \Leftrightarrow (A$ et B sont indépendants$)$.

Correction :

a) On lance deux fois une pièce de monnaie et l'on note A : « on obtient pile au premier lancer », B : « on obtient face au second lancer » et C : « on obtient la même chose aux deux lancers ». Vérifiez que A, B et C sont deux à deux indépendants mais comme $A \cap B \cap C = \emptyset \ldots$

b) D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :
$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Donc $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow A$ et B sont indépendants.

Q46. On note X le résultat du lancer d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité de chacune des face est proportionnelle à son numéro. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

Correction : Soit p la probabilité que le dé tombe sur 1 ie. $\mathbb{P}(X = 1) = p$. Alors $\mathbb{P}(X = k) = kp$ pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$ et, comme $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$, on trouve l'équation $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1 \Leftrightarrow 21p = 1$ donc $p = \frac{1}{21}$. Ce qui détermine bien la loi de X.

Alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6 \times 21} = \frac{13}{3}$ et de même on calcule $\mathbb{V}(X)$ *via* la formule de König-Huygens et la formule de transfert. Tout d'abord on a $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6} k^3 = \frac{6^2 \times 7^2}{21 \times 4} = 21$. Ainsi, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 21 - \frac{13^2}{3^2} = \frac{20}{9}$.

Q47. Une var X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Un compteur détraqué est censé afficher le résultat de X mais, lorsque X vaut 0 ou n il affiche à la place un nombre entier au hasard entre 1 et $n - 1$. On note Y la var valant ce que le compteur défectueux affiche.
Déterminer la loi de Y et son espérance.

Correction : Tout d'abord $Y(\Omega) \subset [\![1, n - 1]\!]$. L'autre inclusion découle du fait que $(X = k)$ pour $k \in [\![1, n - 1]\!]$ se réalise.
Soit $k \in [\![1, n - 1]\!]$. On a : $(Y = k) = (Y = k \cap X = k) \cup (Y = k \cap X = 0) \cup (Y = k \cap X = n)$ et cette union est disjointe (si le compteur affiche k, c'est soit un « vrai k », soit un 0 qui est mal affiché, soit un n mal affiché).
Or $\mathbb{P}(X = k, Y = k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, $\mathbb{P}(Y = k \cap X = 0) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}_{X=0}(Y = k) = p^n\frac{1}{n-1}$ et $\mathbb{P}(Y = k \cap X = n) = \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}_{X=n}(Y = k) = q^n\frac{1}{n-1}$.
D'où $\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k} + \frac{p^n+q^n}{n-1}$.
Y est d'espérance finie car elle est finie et $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{k}p^kq^{n-k} + \frac{p^n + q^n}{n - 1}\sum_{k=1}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1}p^kq^{n-k} + \frac{p^n + q^n}{n - 1}\frac{(n - 1)n}{2}$ (car $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$), ainsi $\mathbb{E}(Y) = n\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}p^{k+1}q^{n-k-1}\right) + \frac{n(p^n + q^n)}{2} = np\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^kq^{n-1-k} - p^{n-1}\right) + \frac{n(p^n + q^n)}{2} = np\left((p + q)^{n-1} - p^{n-1}\right) + \frac{n(p^n + q^n)}{2} = (np - np^n) + \frac{n(p^n + q^n)}{2}$.
D'où $\mathbb{E}(Y) = np + \frac{q^n-p^n}{2}$.

Suites réelles, Séries

Q48. Pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, traduire avec des quantificateurs les assertions (u_n) est minorée / bornée / diverge vers $+\infty$.

Correction : u est minorée : $\exists m \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.
u est bornée : $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}\, |u_n| \leq M$.
u diverge vers $+\infty$: $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0) \Rightarrow (u_n \geq M)$

Q49. Donner la définition et énoncer une caractérisation des bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

Correction : La borne supérieure d'un ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ est le plus petit de ses majorants. Soit E un tel ensemble.
$M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de E si et seulement si M est un majorant de E et : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists e \in E \,/\, e > M - \varepsilon$ (ie M est le plus petit des majorants de E est un majorant de E tel que tout nombre plus petit que lui n'est pas un majorant de E).
Adapter pour la borne inf.

Q50. ($\star$) Si les suites de réels $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Correction : Noter que la réciproque est évidente puisque si une suite converge alors toute suite extraite converge aussi et vers la même limite. Soit ℓ la limite des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). On souhaite montrer que u converge aussi vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$: $\exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_1) \Rightarrow |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ et de même $\exists n_2 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_2) \Rightarrow |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$. Il s'ensuit que pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$ on a à la fois $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi pour tout $n \geq \lfloor \max(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2 - 1}{2}) \rfloor + 1$ on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
La définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ vient d'être vérifiée.

Q51. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels croissante et majorée converge vers $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Correction : On remarque que le fait que (u_n) soit majoré implique l'existence de cette borne sup (l'ensemble est non vide car il contient u_0).
Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang.
Comme $\ell - \varepsilon$ est plus petit que la borne sup ℓ, ce n'est pas un majorant, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$, or (u_n) est croissante, donc pour $n \geq n_0$ on a $u_n \geq \ell - \varepsilon$, or $u_n - \ell$ est négatif, ainsi $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq 0 \leq \varepsilon$, ie. $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$.
On a bien montré : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0,\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ie que (u_n) converge vers ℓ.

Q52. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Correction : Soit $M \in \mathbb{R}$, (u_n) n'est pas majorée donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M$, or (u_n) est croissante donc pour $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0} \geq M$, ie on a montré que pour tout $M \in \mathbb{R}$ on avait $u_n \geq M$ à partir d'un certain rang, ce qui est exactement la définition de (u_n) diverge vers $+\infty$.

Q53. Énoncer et prouver le théorème des suites adjacentes.

Correction : Soit u et v deux suites adjacentes ie. u est croissante et v décroissante et $\lim(u - v) = 0$. Alors u et v convergent et ont même limite. Rappelons la preuve de ce résultat.
$(u_n - v_n)$ est croissante : $u_{n+1} - v_{n+1} - (u_n - v_n) = (u_{n+1} - u_n) - (v_{n+1} - v_n) \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs. Elle converge de plus vers 0 par hypothèse donc elle croît vers 0 ie $u_n - v_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'où $u_n - v_n \leq 0 \Rightarrow u_n \leq v_n$. Comme u est croissante et v décroissante, on a de plus : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ prouvant que u est une suite croissante majorée par v_0 donc convergente, disons vers un réel ℓ, et de même v converge vers ℓ'. Mais $u - v$ a pour limite 0 donc, par unicité de la limite $\ell - \ell' = 0$ ie. $\ell = \ell'$.
Le théorème est démontré et il suffit de rappeler que u croît vers sa limite tandis que v décroît vers elle pour obtenir l'encadrement « complet » : $u_0 \leq u_n \leq \ell \leq v_n \leq v_0$.
Remarque : C'est ce théorème des suites adjacentes qui permet de justifier la méthode de résolution d'une équation par dichotomie. On peut penser à ce théorème lorsqu'il s'agit de montrer que deux suites convergent sans connaître la valeur de leur limite. Cas particulier : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes alors u converge – parfois utile lors de l'étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante sur un intervalle stable I qui contient donc tous les termes de la suite puisque $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$ et que $f \circ f$ est croissante sur I donc (u_{2n}) est monotone; de même (u_{2n+1}) est monotone.

Q54. Suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
Donner une expression de F_n en fonction de n et calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

Correction : La suite de Fibonacci est récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ donc de racines $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent $F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
De $F_0 = 0$ on tire $\alpha + \beta = 0$ et de $F_1 = 1$ on déduit $\alpha r_1 + \beta r_2 = 1$. On résout ce système 2×2 pour trouver $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Pour la suite on remarque $\left|\frac{r_2}{r_1}\right| < 1$
Puis $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = r_1 \dfrac{\alpha + \beta(r_2/r_1)^{n+1}}{\alpha + \beta(r_2/r_1)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r_1$ (le nombre d'Or).

Q55. ($\star$) Théorème de Césaro. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente de limite ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, converge également vers ℓ.

Correction : Tout d'abord on remarque, pour $n \in \mathbb{N}$, que $v_n - \ell = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
Ainsi, pour $n \geq N_1$, on a (la première inégalité n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire) : $|v_n - \ell| \leq \dfrac{1}{n+1}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=N_1}^{n}|u_k - \ell| \leq \dfrac{1}{n+1}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=N_1}^{n}\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| + \dfrac{n-N_1+1}{n+1}\varepsilon \leq \dfrac{1}{n+1}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right| + \varepsilon$ (car $\frac{n+1-N_1}{n+1} \leq 1$).
Or, la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right|\right)_n$ tend vers 0 (produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une constante), il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$ (qui dépend de N_1) tel que pour tout $n \geq N_2$, $\left|\dfrac{1}{n+1}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k-\ell)\right|\right| \leq \varepsilon$.
On pose $N = \max(N_1, N_2)$, on a donc pour $n \geq N$ que $|v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$, ce qui montre que (v_n) converge vers ℓ.

Q56. Étudier la nature des *séries* de termes généraux : $\dfrac{n - \sin(1/n)}{(-1)^n n + 2}$ et $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.

Correction : Pour la première : le numérateur est équivalent à n (en effet si on divise par n on tend vers 1), le dénominateur équivaut à $(-1)^n n$, donc le terme général équivaut à $1/(-1)^n$ qui ne tend pas vers 0 donc la série diverge grossièrement.
Pour la seconde : $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1) = 2\ln(n^3) + 2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) - 3\ln(n^2) - 3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = -3\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Elle est donc convergente (car $\sum \frac{1}{n^2}$ l'est).

Fonctions, continuité, dérivabilité et convexité

Q57. Énoncer le théorème de Rolle.
($\star$) le démontrer.
Application : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment I telle que f prenne 3 fois la même valeur sur I. Montrer qu'il existe un réel α de I tel que $f''(\alpha) = 0$.

Correction : Le théorème de Rolle : soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Démonstration : Si f est constante sur $[a,b]$ alors pour tout $x \in]a,b[$ on a $f'(x) = 0$ et donc tous les éléments de $]a,b[$ conviennent. Si f n'est pas constante, comme f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes, notons m et M le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$ et notons x_m et x_M des éléments de $[a,b]$ tels que $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$. Nécessairement on a x_m ou x_M qui est dans $]a,b[$ et notons le c (en effet si l'un vaut a et l'autre vaut b on aurait $f(x_m) = f(x_M)$ puisque $f(a) = f(b)$ et donc $m = M$ et f serait constante, ce qui est exclus), ainsi c est un extrémum local (global ici) en un point intérieur, on a donc $f'(c) = 0$ (pour le démontrer, comme f est dérivable en c, on a

$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(c)$, si c réalise un minimum local alors $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ est positif pour h positif (et négatif pour h négatif) donc en prenant la limite à droite on a $f'(c) \geq 0$ et en prenant la limite à gauche on a $f'(c) \leq 0$ et donc $f'(c) = 0$, on procède de même si c réalise un maximum local), le théorème de Rolle est donc démontré.

Application : Pour se servir de l'hypothèse C^2 il faudra sans doute dériver plusieurs fois et, dès le début on peut appliquer deux fois le théorème de Rolle. On ne s'en prive pas. Après ces quelques remarques on passe à la rédaction.
Par hypothèse il existe $(a, b, c) \in I^3$ avec $a < b < c$ et $f(a) = f(b) = f(c)$. Sur $[a, b]$ et $[b, c]$ f est continue et dérivable donc le théorème de Rolle s'y applique : il existe $d \in]a, b[$ et $e \in]b, c[$ (en particulier $d < e$) tels que $f'(d) = f'(e) = 0$. Comme f est C^2, f' est C^1 sur I et *a fortiori* sur $[d, e]$. On peut appliquer une nouvelle fois le théorème de Rolle, cette fois sur $[d, e]$ pour obtenir l'existence de $\alpha \in]d, e[$ tel que $(f')'(\alpha) = 0$ ie. $f''(\alpha) = 0$.
Remarque : ce petit raisonnement est un classique. Imaginer une généralisation de celui-ci et la prouver.

Q58. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Correction : Égalité des accroissements finis : soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
Inégalité des accroissements finis : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$. Alors, pour tout $(x, y) \in I^2$, tel que $x \leq y$ on a : $m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y)$.
Cas particulier : si $|f'(x)| \leq M$ sur I alors pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.
Remarque : il est bon de comprendre la signification de ce théorème en terme de distance parcourue (la fonction f) par un mobile entre les temps $t = x$ et $t = y$ en liaison avec sa vitesse instantanée donnée par f'.

Q59. Montrer qu'une fonction est croissante sur I si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle sur I.
Donner un exemple de fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée s'annule en 0.

Correction : C'est une conséquence immédiate du TAF avec $m = 0$ pour le sens « $f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante ».
Pour la réciproque : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ implique que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a un numérateur du signe de h donc est un quotient positif par la règle des signes. Par passage à la limite quand $h \to 0$ on a donc $f'(x) \geq 0$.
La fonction cube est strictement croissante et sa dérivée en 0 est nulle.
Rappel : Une fonction dérivable de dérivée strictement positive sur un intervalle I sauf en un ensemble fini de points (en fait dénombrable convient aussi) ou elle s'annule est strictement croissante.
Attention : I doit être un intervalle, sinon le résultat deviens faux, considérer la fonction inverse qui n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^\star$, elle l'est seulement sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sur $\mathbb{R}_-^\star$.

Q60. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I = [a, b]$ en un réel $x \in [a, b]$.
Application : montrer que : $\exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \right| \leq M \frac{|b - a|^{n+1}}{(n + 1)!}$.
Expliciter cette inégalité pour $f = \exp$, $a = 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Correction : Égalité de Taylor avec reste intégral : soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $I = [a, b]$. Alors pour tout $x \in I$, on a :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \int_a^x f(n + 1)(t)\frac{(t - a)^n}{n!}\mathrm{d}t$.
Ce qui implique que : $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \right| \leq \int_a^x |f^{(n+1)}(t)| \frac{|t - a|^n}{n!}\mathrm{d}t$.
Comme $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment I elle y est bornée (et atteint ses bornes) et en particulier il existe $M \geq 0$ tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ sur I. De plus $\int_a^x \frac{|t - a|^n}{n!}\mathrm{d}t = \left[\frac{|t - a|^{n+1}}{(n + 1)!}\right]_a^x$. *Attention* : on n'intègre pas comme si de rien était avec les barres de valeur absolue ! On a tout simplement ici $t \geq a$ donc $|t - a| = t - a$.
Il vient $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \right| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, la dernière inégalité par croissance de $X \mapsto X^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $f = \exp$ et $a = 0$ on obtient $\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \left[\sup_{t\in I} \mathrm{e}^t\right] \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ où $I = [0, x]$ si $x \geq 0$ et $I = [x, 0]$ si $x \leq 0$.
Sur $[-1, 1]$ par exemple, comme $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = o(x^n)$, on en déduit $e_x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Et donc le fait que la série exponentielle converge vers la fonction du même nom appliquée en x.

Q61. Montrer l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

Correction : On pense « bien sûr » au TAF appliqué à la fonction $f = \sin$ qui est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f' = \cos$ donc majorée en valeur absolue par 1 sur $\mathbb{R}$. Enfin prendre $y = 0$ dans l'IAF pour avoir la conclusion.
Autre méthode : Assez clairement il ne faut vérifier le résultat que sur $[0, 1]$ ($\sin$ et $x \mapsto x$ étant impaires on peut se restreindre sur $\mathbb{R}_+$, comme $\sin < 1$ le résultat est vrai pour $x \geq 1$). Il suffit donc de montrer que $f : x \mapsto \sin x - x$ est négative sur $[0, 1]$, sa dérivée est $x \mapsto \cos x - 1$ qui est négative sur $[0, 1]$ (car $\cos \leq 1$) qui est un intervalle donc f est décroissante, or $f(0) = 0$, d'où le résultat.

Q62. Rappeler la définition d'une fonction convexe et sa caractérisation dans le cas où elle est deux fois dérivable.
Application :

(a) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.
(b) Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave (ie que $-f$ est convexe) sur $]1, +\infty[$.
(c) En déduire que : $\forall (a, b) \in]1, +\infty[$, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Correction : Une fonction f est convexe sur I si : $\forall (a, b) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda a + (1 - \lambda b)) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$.
Si f est deux fois dérivable alors f est convexe sur I ssi $f'' \geq 0$ sur I.

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp^{(2)}(x) = \mathrm{e}^x \geq 0$, ainsi $\exp$ est convexe, la formule demandée n'est rien d'autre que la définition pour $\lambda = \frac{1}{2}$. Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.
(b) On remarque tout d'abord que f est bien définie sur I (car si $x > 1$ alors $\ln(x) > 0$) et est deux fois dérivable, de plus pour $x > 1$ on a $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ et donc $f''(x) = \frac{-1}{x^2}\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\frac{-1}{x(\ln(x))^2} \leq 0$, ainsi $-f'' \geq 0$ donc f est bien concave sur $]1, +\infty[$.
(c) Pour $(a, b) \in]1, +\infty[$, la définition de la convexité de $-f$ pour $\lambda = \frac{1}{2}$ donne $-f(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) \leq \frac{-1}{2} f(a) + \frac{-1}{2} f(b)$, ie. (en multipliant par -1) $\ln\left(\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right) \geq \dfrac{1}{2}\ln(\ln(a)) + \dfrac{1}{2}\ln(\ln(b)) = \ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right)$, il ne reste plus qu'à composer par exp qui est croissante pour avoir : $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Intégration

Q63. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in]0, \pi/2[$. (utiliser une intégration par parties)

Correction : On donne la stratégie, reste à savoir quoi poser : cette étape de l'IPP est décisive et il convient, au risque de devoir tout recommencer, de s'assurer, mentalement ou au brouillon, que les choix faits vont « dans la bonne direction ». Par exemple, dans la question précédente on aurait pu réaliser une IPP en intégrant le polynôme et en dérivant l'exponentielle mais ...
Profitons de cette question pour redonner le cadre rédactionnel correct d'une IPP :
Sur $I = [0, x]$, on pose $\begin{cases} u(t) = t \text{ donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} \text{ donc } v(t) = \tan(t) \end{cases}$. Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, on *peut* intégrer par parties pour avoir $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t = [t\tan(t)]_0^x - \int_0^x \tan(t)\mathrm{d}t = x\tan(x) - \int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t = x\tan(x) + \Big[\ln|\cos(t)|\Big]_0^x = x\tan(x) + \ln\cos(x)$.
Conseil : à la maison, que ce soit pour les exercices ou pour un devoir non surveillé, il est bon de vérifier ses résultats à l'aide de l'ordinateur. Par exemple ici peut utiliser `xcas`. L'ordinateur ne fait pas le travail à notre place mais on s'en sert rationnellement et de façon critique et contrôlée pour vérifier ses propres conclusions;

lorsque cela est possible. Attention, les logiciels de calcul formel ne donnent pas toujours leur solution sous la même forme et il pourra être utile de faire tracer – par exemple par `Python` – le graphe de la fonction différence entre votre résultat et celui de la machine. À quelle condition, nécessaire, sur ce graphe peut-on penser que l'on a trouvé le résultat ? Est-ce suffisant ?

Q64. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3}|u^2-u-2|\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{|u^2-u-2|}$. (étudier le signe de u^2-u-2)

Correction : Ce petit exercice pour se rappeler comment gérer les valeurs absolues : s'en débarrasser ! Mais pas n'importe comment bien entendu, en étudiant le signe de ce qu'elles enserrent, ici le trinôme u^2-u-2 qui a pour racines (évidentes) -1 et 2 et qui est donc égal à sa valeur absolue en dehors de $]-1,2[$. Cela justifie les calculs :
$\displaystyle\int_{-2}^{3}|u^2-u-2|\mathrm{d}u=\int_{-2}^{-1}(u^2-u-2)\mathrm{d}u+\int_{-1}^{2}(2+u-u^2)\mathrm{d}u+\int_{2}^{3}(u^2-u-2)\mathrm{d}u=\frac{49}{6}$.
De même :
$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{|u^2-u-2|}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{2+u-u^2}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)(u-2)}=\int_0^1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-2}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\Big[\ln|u+1|-\ln|u-2|\Big]_0^1=\frac{2}{3}\ln 2$.

Q65. Calculer $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Correction : Il y a plusieurs manières pour mener ce calcul, on peut par exemple commencer par faire $+x^2-x^2$ au numérateur : $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 x\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, puis faire une IPP sur la seconde intégrale (on dérive $x\mapsto x$ et on intègre $x\mapsto\frac{x}{(1+x^2)^2}$, les fonctions misent en jeux sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$) :
$I=\Big[\arctan(x)\Big]_0^1-\left(\left[\frac{-1}{2}\frac{1}{1+x^2}x\right]_0^1+\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

Alternative : On a $J=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}=\frac{\pi}{4}$, on fait une IPP (on dérive $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ et on intègre $x\mapsto 1$, les fonctions misent qui interviennent sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, ainsi $J=\left[\frac{1}{1+x^2}x\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1 x\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, il ne reste plus qu'à faire $+1-1$ au numérateur de la quantité dans l'intégrale pour avoir $J=\frac{1}{2}+2\left(\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}+2J-2I$, ainsi $I=\frac{1}{4}+\frac{J}{2}$, comme $J=\frac{\pi}{4}$, on retrouve bien (heureusement) que $I=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$.

Q66. À quelle condition sur f a-t-on : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0\Longrightarrow f=0$ sur $[a,b]$? Le démontrer.

Correction : On demande f continue et positive. En effet si on enlève la continuité le résultat est faux (par exemple la fonction définie par $f(t)=0$ pour $t\in[0,1[\cup]1,2]$ et $f(1)=1$ n'est pas la fonction nulle sur $[0,2]$ mais son intégrale est nulle), idem si on enlève la positivité (par exemple l'intégrale de sin sur $[0,2\pi]$ est nulle).
Montrons cette implication dans le cas où f est continue et positive sur $[a,b]$, d'après le théorème fondamentale de l'analyse la fonction $F:x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a, cette fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'=f$, ainsi, comme f est positive, on en déduit que F est croissante sur $[a,b]$, or on a $F(a)=F(b)=0$ ($F(a)=0$ par construction de F, $F(b)=0$ par hypothèse), ainsi F est constante sur $[a,b]$, sa dérivée est donc nulle sur $[a,b]$, ie $f=0$ sur $[a,b]$.
Alternative : par l'absurde, on suppose qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)\neq 0$, par continuité de f appliqué à $\varepsilon=\frac{f(c)}{2}$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[c-\eta,c+\eta]$ on ait $|f(x)-f(c)|\leq\varepsilon$, en particulier $f(x)\geq\frac{f(c)}{2}>0$, il ne reste plus qu'a utiliser l'inégalité de Chasles (on adaptera si $c=a$ où $c=b$) : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{c-\eta}f(t)\mathrm{d}t+\int_{c-\eta}^{c+\eta}f(t)\mathrm{d}t+\int_{c-\eta}^{b}f(t)\mathrm{d}t\geq 0+\int_{c-\eta}^{c+\eta}\frac{f(c)}{2}\mathrm{d}t+0=\frac{2\eta f(c)}{2}=\eta f(c)>0$ ce qui est absurde.

Q67. Soit $f:x\mapsto\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ quand $x \neq 0$. On pourra introduire une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$.
(c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2$. (distinguer suivant le signe de x)
(d) La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ? Si oui, son prolongement est-il une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Correction :

(a) La fonction $g : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $[x, 2x]$ si $x > 0$ et sur $[2x, x]$ si $x < 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

(b) D'après (a) g possède une primitive sur $[0, +\infty[$ notée G.
La relation de Chasle et le théorème fondamental de l'analyse donne alors $f(x) = G(2x) - G(x)$. Et f apparaît être la somme de deux fonctions dérivables par composition puisque les polynômes le sont et que G l'est par définition. Les règles de calculs sur les dérivées fournissent $f'(x) = 2G'(2x) - 1G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{e^x}{x}(e^x - 1)$.
On se place ensuite sur $]-\infty, 0]$ et l'on obtient la même expression.

(c) Pour $x > 0$, par croissance de exp : $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$ donc $\frac{e^x}{t} \leq g(t) \leq \frac{e^{2x}}{t}$.
Par croissance de l'intégrale (N.B. $x \leq 2x$ **car** $x > 0$) il vient $e^x \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq f(x) \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \Leftrightarrow e^x(\ln(2x) - \ln x) \leq f(x) \leq e^{2x}(\ln(2x) - \ln x)$ d'où le résultat.
Pour $x < 0$ reprendre la même démarche mais avec vigilance pour les sens d'inégalités : la division par t change le sens car $t \in [2x, x] \subset \mathbb{R}_-^\star$ et puis la croissance de l'intégrale s'applique à $-\int_x^{2x}$.

(d) f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 2$ d'après l'encadrement précédent.
Pour le prolongement $\mathcal{C}^1$, ayant déjà la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et le fait qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}^\star$, il suffit d'étudier la lite éventuelle de f' en 0 : si elle est finie alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1\times x}{x} = 1$ donc f' tend vers 1 lorsque $x \to 0$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q68. Trouver la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$. (sommes de Riemann)

Correction : L'indication est précieuse pour la première somme et invite à poser $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell + n}$.

Là on reconnaît une somme de Riemann et l'on modifie de nouveau l'écriture : $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{\ell}{n}}$.

Puisque $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$, le théorème de la moyenne permet d'affirmer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \Big[\ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2$.
Pour la seconde somme on aurait pu/dû penser à une somme de Riemann sans indication.
$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$. Puisque $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ est continue sur $[0, 1]$, le théorème de la moyenne fournit :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}$. On reconnaît la dérivée de arcsin d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

Q69. Trouver un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ des termes : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k + n}}$.

Correction : Là encore on pense naturellement aux sommes de Riemann.
$u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Or $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ tend vers $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ car $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$. On intègre en arctan et on conclut : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n}$.

On procède de même pour v_n : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n}} \times \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sqrt{n}\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{3} n^{3/2}$.

Remarque : l'intégrale se calcule, par exemple, en remarquant que $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{x+1-1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Polynômes

Q70. Décomposer en produits d'irréductibles X^5+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction : $X^5+1=0 \Leftrightarrow X^5=-1 \Leftrightarrow \rho^5 e^{5i\theta} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \rho = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{5}$ modulo $\frac{2\pi}{5}$.
En notant $\xi = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, les racines complexes de $X^5+1=0$ sont les $e^{i\frac{\pi}{5}}\xi^k$ pour $k \in [\![0,4]\!]$.
On pose $\alpha = e^{\frac{i\pi}{5}}$ $(k=0)$, $\beta = e^{\frac{3i\pi}{5}}$ $(k=1)$, les autres racines sont alors -1 $(k=2)$, $\overline{\beta}$ $(k=3)$ et $\overline{\alpha}$ $(k=4)$.
Ainsi $X^5+1 = (X+1)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})(X-\beta)(X-\overline{\beta})$, c'est la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.
Dans $\mathbb{R}[X]$ il faut regrouper les racines complexes conjuguées, et on trouve $X^5+1 = (X+1)(X^2-2\cos(\frac{\pi}{5})X+1)(X^2-2\cos(\frac{3\pi}{5})X+1)$.

Q71. Effectuer la division euclidienne de $X^5+4X^4+2X^3+X^2-X-1$ par X^3-2X+3 après énoncé du résultat général.

Correction : Soit A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ+R$ et $\deg R < \deg B$; Q est le quotient de la division de A par B et R son reste.
Pour effectuer le calcul de cette division on la « pose » comme s'il s'agissait d'une division entre entiers (comme au primaire).
On obtient ici $X^5+4X^4+2X^3+X^2-X-1 = (X^2+4X+4)(X^3-2X+3)+(6X^2-5X)-13$.
Remarque : ces calculs se vérifient facilement en développant.

Q72. Déterminer le reste dans la division euclidienne d'un polynôme P par la polynôme $(X-a)(X-b)$ où a et b sont deux réels distincts donnés. Que se passe-t-il lorsque $a=b$?
Indication : on pourra écrire la division euclidienne et l'évaluer en a et b.

Correction : Suivons l'indication : $P = Q.(X-a)(X-b)+R$ où R est de degré ≤ 1 ie. $R = pX+q$.
On évalue en a : $P(a) = R(a) = ap+q$. Puis en b pour avoir $P(b) = R(b) = bp+q$.
Ce petit système en (p,q) se résout facilement : $(p,q) = \left(\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}, \dfrac{aP(b)-bP(a)}{a-b}\right)$.
Si $a=b$ on a toujours deux inconnus, mais seulement une équation, pour en obtenir une seconde on dérive $P = Q.(X-a)^2+R$ puis on évalue en a pour obtenir une seconde équation : $P' = Q'.(X-a)^2+2Q.(X-a)+R'$, ainsi $P'(a) = R'(a) = p$, le système se résout alors immédiatement : $(p,q) = (P'(a), P(a)-aP'(a))$.

Espaces vectoriels

Q73. On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des espaces vectoriels puis montrer que ce sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Correction : Que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ soient des sev de E est une application directe du critère de sev.
Détaillons pour $\mathcal{P}$: cet ensemble est bien contenu dans E et non vide puisque la fonction nulle est paire. Si f et g sont paires définies sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f+g$ est encore définie sur $\mathbb{R}$ et de plus $(\lambda f+g)(-x) = \lambda f(-x)+g(-x) = \lambda f(x)+g(x)$ car f et g sont paires donc $(\lambda f+g) \in \mathcal{P}$. Ainsi $\mathcal{P}$ est un sev de E. De même pour $\mathcal{I}$.
Une fonction f, paire et impaire, est nulle puisque $f(x) = f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$, la somme est donc directe. Reste à voir qu'elle épuise E ie que toute fonction est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
On procède par analyse-synthèse.
Analyse : on suppose que c'est le cas pour $f \in E$ que l'on écrit $f = p+i$ où $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$.

Alors $f(x) = p(x)+i(x)$ et $f(-x) = p(-x)+i(-x) = p(x)-i(x)$. Cela fournit un système 2×2 en $(p(x), i(x))$ que l'on résout de tête pour avoir $p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
Synthèse : posons $p(x)$ et $i(x)$ comme avant. Il reste à vérifier que ces fonctions sont bien respectivement paire et impaire.
Facile, laissé au lecteur, ainsi que la conclusion.

Q74. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'une espace E.
Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
($\star$) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Correction : $F \cap G \subset E$ et $0_E \in F \cap G$ donc $F \cap G$ est non vide et contenu dans un ev.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(u, v) \in (F \cap G)^2$. Alors $\lambda u + v \in F$ car F est un ev, de même $\lambda u + v \in G$ donc $\lambda u + v \in F \cap G$.
Il en résulte que $F \cap G$ est un sev de E.

On passe à l'union. Le sens $\Leftarrow$ est évident (si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$).
Pour $\Rightarrow$: on suppose $F \cup G$ sev de E et on raisonne par l'absurde en supposant $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
Cela se traduit par l'existence de $f \in F \setminus G$ et $g \in G \setminus F$. $F \cup G$ étant stable par somme $f + g \in F \cup G$. Si $f + g \in F$ alors on a $f + g = f' \in F$ mais alors $g = f' - f \in F$ ce qui est absurde et sinon on a $f + g = g' \in G$ mais alors $f = g' - g \in G$ ce qui n'est pas moins impossible. Contradiction. En conclusion : $F \cup G$ sev de E implique $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Q75. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (E, F deux ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$).

Correction : Attention, bien que la rubrique soit « espace vectoriel » on ne suppose rien sur E et F ici. Bien entendu le résultat sera vrai si E, F et G sont des $\mathbb{K}$-ev et f et g des morphismes entre eux. Dans ce cas on peut faire une preuve avec les ker ; laissée au lecteur ; voici deux démonstrations possibles :
Directement : soit $(a, b) \in E^2$ tels que $f(a) = f(b)$. En composant par g on a $g(f(a) = g(f(b))$, ie. $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, or $g \circ f$ est injective, ainsi $a = b$. On a donc montré : $\forall (a, b) \in E^2$, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, ie. f est injective.
Par contraposée : supposons f non injective. Alors il existe $(a, b) \in E^2$ avec $a \neq b$ et tel que $f(a) = f(b)$. Alors $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = g \circ f(b)$ donc $g \circ f$ n'est pas injective.

Q76. Soit f une application linéaire sur E un espace vectoriel. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Correction : À comprendre et savoir faire, absolument. On procède par double implication.
Pour $\Rightarrow$: Soit f une application linéaire injective. Comme f est un morphisme, $f(0_E) = 0_F$ et, comme f est injective, $f(x) = 0_F$ implique $x = 0_E$ ie. le noyau de f est trivial.
Pour $\Leftarrow$: On suppose f linéaire de noyau trivial. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f il vient $f(x - y) = 0_F$ donc $x - y \in \ker(f)$. Or $\ker f = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ ainsi $x = y$. Le morphisme f est bien injectif.
Conclusion : f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Q77. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Correction : Avec le critère de sev. Tout d'abord $f(E) \subset F$ qui est un ev et $f(0_E) = 0_F \in f(E)$ donc $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas vide. Ensuite, soit $(y_1, y_2) \in \mathrm{Im}(f)^2$ ie. $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ pour un certain couple $(x_1, x_2) \in E^2$. Par linéarité de f on a pour tout scalaire λ : $\lambda y_1 + y_2 = f(\lambda x_1 + x_2) \in f(E)$. Donc l'image de f est stable par combinaison linéaire. Conclusion : $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F.

Q78. Montrer $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$ où $u \in \mathcal{L}(E)$. Comparer les images de u et de $u^2 = u \circ u$.

Correction : Soit $x \in \ker(u)$ ie. $u(x) = 0_E$. Comme u est linéaire, $u(0_E) = 0_E$ donc $u(u(x)) = 0_E$ ie. $x \in \ker(u \circ u)$.
Il suit $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u^2)$ ie. $\exists x \in E \,/\, y = u^2(x)$. On a donc $y = u(u(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}(u)$ (y est l'image de $u(x)$ par u), ce qui montre donc que : $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Q79. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ avec E, F et G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
Montrer que $(v \circ u = 0) \Leftrightarrow (\text{Im } u \subset \ker\ v)$.

> **Correction :** On raisonne par double implication.
> Pour $\Rightarrow$: On suppose $v \circ u = 0$ ie. $\forall x \in E$, $v(u(x)) = 0_G$. Donc, pour tout $x \in E$, $u(x) \in \ker(v)$. Comme l'image de u est l'ensemble des $u(x)$ pour x parcourant E on a $\operatorname{Im} u \subset \ker v$.
> Réciproquement pour $\Leftarrow$: on suppose $\operatorname{Im} u \subset \ker(v)$ ie. pour tout $x \in E$, $u(x) \in \ker v$ ie. $v(u(x)) = 0_G$.
> On a donc pour tout $x \in E$, $v \circ u(x) = 0_G$ ie. $v \circ u$ est le morphisme nul.

Espaces vectoriels de dimension finie

Pour les questions suivantes : E, F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies où $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \le i \le n}$ une base de E.

Q80. Montrer que si φ est injective alors $(\varphi(u_i))_{1 \le i \le n}$ est une famille libre de F.

> **Correction :** De façon plus générale on montre que l'image d'une famille libre est encore libre par un morphisme injectif.
> Soit des coefficients $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\lambda_1\varphi(u_1) + \cdots \lambda_n\varphi(u_n) = 0_F$. Par linéarité $\varphi(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0_F$ donc $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in \ker(\varphi)$. Comme φ est injective, $\ker\varphi = \{0_E\}$ donc $\lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n = 0_E$.
> Or $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
> Conclusion : $(\varphi(u_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille libre de F.

Q81. Montrer que l'image d'une famille génératrice de E par φ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

> **Correction :** Soit $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille génératrice de E. Alors pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$. Par linéarité de φ, $\varphi(x) = \lambda_1\varphi(u_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(u_n)$. Cette égalité montre que $(\varphi(u_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ engendre $\operatorname{Im}(\varphi)$.
> En particulier l'image d'une famille génératrice de E par une application linéaire surjective de E dans F est une famille génératrice de F.

Q82. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si $n = p$.

> **Correction :** Par double implication comme souvent.
> Pour $\Rightarrow$: soit $f : E \to F$ un isomorphisme. L'image d'une base de E est une base de F. Donc les bases de E et de F ont même cardinal ie. $\dim E = \dim F$.
> Réciproquement pour $\Leftarrow$: on suppose $\dim E = \dim F = n$ et on considère $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des bases de E et F respectivement. On introduit l'application linéaire u définie par $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ (une application linéaire est complètement déterminée par l'image d'une base), comme il transforme une base en une base c'est un isomorphisme, ainsi u est un isomorphisme de E sur F.

Q83. Énoncer le théorème du rang.
($\star$) Le démontrer.

> **Correction :** Théorème du rang : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\dim E = \dim\ker(f) + \operatorname{rg}(f)$.
> Pour la preuve on considère un supplémentaire E' de $\ker(f)$ dans E (ie. $E = \ker(f) \oplus E'$, on notera que ainsi $\dim E = \dim\ker(f) + \dim E'$) et la restriction de f à E' : $f_{|E'} : E' \to F$.
> L'image de $f_{|E'}$ est l'image de f (par construction $\operatorname{Im} f_{|E'} \subset \operatorname{Im} f$, pour l'autre sens : soit $y \in \operatorname{Im} f$, donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, on décompose x avec la somme directe : $x = x_k + x'$, ainsi $f(x) = f(x')$ car $x_k \in \ker f$, donc $f_{|E'}(x) = y$, on a donc montré $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f_{|E'}$) donc $f_{|E'} : E' \to \operatorname{Im}(f)$ est surjective.
> D'autre part $f_{|E'}$ est injective par construction : $f_{|E'}(x) = 0_F \Rightarrow x \in \ker(f_{|E'})$ donc $x \in \ker(f) \cap E'$ d'où $x = 0_E$ par définition de E'.
> Ainsi $f_{|E'} : E' \to \operatorname{Im}(f)$ est un isomorphisme et par conséquent $\dim E' = \dim\operatorname{Im}(f)$ ie. $\dim E - \dim\ker(f) = \operatorname{rg}(f)$.

Q84. Soit f l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $P(2X+1)$.

(a) Montrer que $f(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ définit par $g : P \mapsto f(x)$ (on dit que c'est l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_3[X]$).

(b) Déterminer $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Déterminer si g est injective, surjective, bijective.

Correction :

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]$. $f(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(2X+1) = \lambda P(2X+1)+Q(2X+1) = \lambda f(P)+f(Q)$ donc f est linéaire. Comme $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ car c'est une composée de polynômes donc un polynôme et que $\deg(f(P)) = \deg(P)$, f induit donc un endomorphisme g de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Comme $\deg(g(P)) = \deg(P)$ le noyau de g est trivial. L'image de g est alors $\mathbb{R}_3[X]$ – sans aucun calcul – puisque l'endomorphisme g en **dimension finie** est injectif donc bijectif donc surjectif.

Q85. Soit H un hyperplan de E, $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et on pose $D = \mathrm{Vect}(a)$.
À quelle condition sur a a-t-on $H \oplus D = E$.
($\star$) Soit H' au autre hyperplan de E, montrer qu'il existe une droite D telle que $H \oplus D = H' \oplus D = E$. On pourra utiliser la question **Q74.**. En utilisant une récurrence descendante montrer que deux sev F et G de E possèdent un supplémentaire commun si et seulement si ils ont la même dimension.

Correction : On a déjà $\dim(H) + \dim(D) = \dim(E)$, or $H \cap D = \{0\} \iff a \notin H$, ce qui montre que : $H \oplus D = E \iff a \notin H$.

Avec deux hyperplans maintenant, on a D supplémentaire commun à H et H' si et seulement si $a \notin H$ et $a \notin H'$, il existe donc un supplémentaire commun si et seulement si $H \cup H' \neq E$. Si jamais $H \cup H' = E$ alors on a une réunion de sev qui est un sev, ainsi d'après la question **Q74.** on a $H \subset H'$ ou $H' \subset H$, comme H et H' ont la même dimension (ce sont des hyperplans de E) on aurait $H = H'$ et donc $E = H \cup H' = H$ ce qui est impossible car $\dim(E) = \dim(H) + 1$. Ainsi $H \cup H' \neq E$ et donc il existe un élément a de E qui est ni dans H ni dans H', alors $D = \mathrm{Vect}(a)$ est un supplémentaire de H et de H'.

Pour le cas général, notons tout d'abord que si M est un supplémentaire de F et de G alors $\dim(F) + \dim(M) = \dim(G) + \dim(M) = \dim(E)$ et donc nécessairement F et G ont la même dimension. Montrons que cette égalité de dimension est une condition suffisante. Procédons par récurrence descendante sur la dimension p de F, le résultat est déjà démontré pour $p = n$ et $p = n-1$. Supposons la montrée pour $2 \leq p \leq n-1$ et montrons la pour $p-1$. Soit F et G deux sev de dimension p de E. On a $F \cup G \neq E$ (sinon problème, même démonstration que pour le cas des hyperplans) ainsi il existe $a \in E$ tel que $a \notin F$ et $a \notin G$, notons $D = \mathrm{Vect}(a)$, on pose $F' = F + D$, on a $F' = F \oplus D$ (car $a \notin F$ donc $F \cap D = \{0\}$) et de même on pose $G' = G \oplus D$, on a $\dim F' = p = \dim G'$, par HR il existe un supplémentaire M' de F' et de G', ie $F' \oplus M' = E = F' \oplus M'$, ainsi $F \oplus D \oplus M' = E = G \oplus D \oplus M'$. Ainsi $M = D \oplus M'$ est un supplémentaire commun de F et G, ce qui termine hérédité et la récurrence.

Matrices

Q86. Donner la matrice de $s(x,y) = \left(\frac{-x-2y}{3}, \frac{-4x+y}{3}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et dans la base $((1,-2),(1,1))$.

Correction : Pour ce qui est de la base canonique, il s'agit de trouver la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $s(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cela se lit directement dans l'expression de $s(x,y)$: $A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

La famille proposée est bien une base de $\mathbb{R}^2$: les vecteurs ne sont pas colinéaires et au nombre de deux. La matrice de passage de la base canonique à la base proposée est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et a pour inverse $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les formules de changement de base fournisse la matrice demandée $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alternative : on aurait tout aussi bien pu calculer les images de $(1,2)$ et $(1,1)$ par s puis déterminer leurs coordonnées dans la base $((1,2),(1,1))$; surtout ici vu le résultat obtenu : s est la symétrie d'axe la droite vectorielle engendrée par $(1,2)$.

Q87. Donner la formule du produit d'une matrice $n \times p$ par une matrice $p \times r$ et effectuer un produit pour n, p et r distincts.

Correction : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$. Le produit AB existe, posons $C = (c_{i,j})$ la matrice $C = AB$, on a $C \in \mathcal{M}_{n,r}$, et pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,r]\!]$ on a $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$

Q88. Calculer $(A+B)^2$ puis $A^2+2AB+B^2$ pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ choisies au hasard mais sans coefficient nul. Commenter.

> **Correction :** On a $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ et, lorsque A et B ne commutent pas (ce qui est la règle et non l'exception) la formule du binôme ne vaut pas.

Q89. Si $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$ pour $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$.
Rappel : $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant que des zéros sauf à la i^e ligne et la j^e colonne où le coefficient vaut 1.

> **Correction :** Ce n'est que l'application de la définition du produit matriciel.

Q90. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
On pourra écrire $A = 2I_3 + J$ où J est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 puis utiliser la formule du binôme.

> **Correction :** On suit bien sûr l'indication qui incite à utiliser la formule du binôme de Newton. Cela est licite puisque $2I$ commute avec J. On obtient ainsi (on utilise aussi que $J^2 = 3J$ et donc, par récurrence immédiate, $J^n = 3^{n-1}J$ pour $n \geq 1$) :
>
> $$\begin{aligned} A^n &= (2I+J)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I^{n-k} J^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} J + \binom{n}{0} 2^n I \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k \right) J - \binom{n}{0} 2^n J \right) + 2^n I = \frac{1}{3}(2+3)^n J - \frac{1}{3} 2^n J + 2^n I \\ &= \frac{5^n - 2^n}{3} J + 2^n I \end{aligned}$$
>
> Finalement, $A^n = \frac{5^n - 2^n}{3} J + 2^n I$.
> *Remarque :* pour $n = 0$ et $n = 1$ on trouve fort heureusement I et A. Tester ainsi la cohérence de ses résultats avant de les encadrer est un réflexe à intégrer à sa pratique mathématique.

Q91. Énoncer la formule de changement de base pour une application linéaire.

> **Correction :** Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre deux ev de dimension finie. Soit $P = M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_E)$ (resp. $Q = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_F)$) la matrice de passage de $\mathcal{C}'$ vers $\mathcal{C}$, deux bases de E (resp. de F).
> La formule de changement de base est $M_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f) = Q \times M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \times P^{-1}$
> *Conseil :* en écrivant les matrices de passage comme la matrice de l'identité dans certaines bases et en les interprétant comme des « traducteurs du langage d'une base dans une autre » la formule ci-dessus se comprend et se retrouve facilement. Cette formule repose sur la propriété essentielle des matrices d'applications linéaires – en fait « la » raison d'être des matrices et motif du choix du produit matriciel – que la matrice d'une composée est le produit des matrices.

Q92. Calculer le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode de Gauss.

> **Correction :** Déjà ce rang est inférieur au minimum des dimensions de la matrice, ici 3.
> Avec la méthode proposée et les opérations élémentaires sur les lignes $L_2 \leftarrow \frac{5L_1 - L_2}{4}$; $L_3 \leftarrow \frac{9L_1 - L_3}{4}$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$,
> on aboutit à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ qui est de rang 3 et donc $\mathrm{rg}(M) = 3$.

Q93. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. On développera par rapport à une ligne et l'on factorisera le résultat.

Correction : Ce déterminant, noté d ensuite, est d'une forme particulière et sera étudié cette année : déterminant de Vandermonde.
Avant de développer par rapport à la 1re ligne, on fait apparaître des 0 par $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \leftarrow C_1 - C_3$, pour avoir $d = (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$. Par multilinéarité du déterminant on factorise $a-c$ et $b-c$ pour avoir
$d = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a)$.
Remarque : faites aussi ce calcul avec la règle de Sarrus pour voir combien elle est moins efficace qu'un développement judicieux par rapport à une ligne ou une colonne. Notamment lorsqu'il s'agit d'obtenir un résultat sous une forme plus agréable et imposée comme ici factorisée.

Q94. Déterminer la matrice A de la projection sur le plan d'équation $x - 2y = z$ parallèlement au vecteur $\vec{u}(1, 0, -1)$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : L'énoncé sous-entend la matrice de p dans la base canonique. On propose deux méthodes : la première, naturelle et géométrique, et la seconde plus « algèbre linéaire ».
On note $\mathcal{P}$ le plan but. Noter qu'en guise de vérification on doit avoir $p \circ p = p$ ie. $M^2 = M$ matriciellement.

(a) Géométriquement.
À l'aide d'un dessin (le faire!) représentant le plan et le vecteur $\vec{u}$ ainsi qu'un point $M(x, y, z)$ extérieur au plan. Tout point de la droite dirigée par $\vec{u}$ passant par M a pour coordonnées $(x+t, y, z-t)$ pour t décrivant $\mathbb{R}$. Un tel point appartient au plan but, à condition que $(x+t) - 2y = z - t \Leftrightarrow t = \frac{z+2y-x}{2}$.
On en déduit la matrice de p demandée : $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $M^2 = M$ et de ceci on tire $M^n = M$ pour tout $n \geq 1$ par une récurrence immédiate. Noter qu'on pouvait répondre à cette dernière question sans avoir à trouver explicitement M. Un réflexe « concours » à acquérir si ce n'est pas déjà fait.

(b) À partir d'une base adaptée.
Le plan $\mathcal{P}$ est engendré par $\vec{v}(1, 0, 1)$ et $\vec{w}(0, 1, -2)$. Alors $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. La matrice de p dans cette base est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On peut calculer son inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On conclut par changement de base : $M = PNP^{-1}$. Fort heureusement on trouve la même matrice qu'en (a).

Espaces euclidiens

Q95. Calculer la distance euclidienne du point $A(1, 2, 3)$ au plan d'une équation $x + y + z = 0$.

Correction : Il s'agit de calculer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$. Ce plan a pour un vecteur normal $\vec{u}(1, 1, 1)$ donc les points de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ ont pour coordonnées $(1+t, 2+t, 3+t)$. Reste à savoir pour quelle valeur de t le point appartient à $\mathcal{P}$ ie. $(1+t) + (2+t) + (3+t) = 0 \Leftrightarrow t = -2$. Donc $H(-1, 0, 1)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ d'où $d(A, \mathcal{P}) = AH = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{3}$.
Alternative : (il faut faire un dessin !) On note encore H le projeté orthogonale de A sur le prend et on prend un point I du plan, par exemple le point de coordonnées $(1, -1, 0)$. Le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$ est normal au plan, on a (relation de Chasles et $\overrightarrow{IH}$ orthogonal à $\vec{u}$) : $< \overrightarrow{IA}, \vec{u} > = < \overrightarrow{IH}, \vec{u} > + < \overrightarrow{HA}, \vec{u} > = < \overrightarrow{HA}, \vec{u} >$, comme $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires on a $< \overrightarrow{IA}, \vec{u} > = \pm HA\|\vec{u}\|$. Ainsi la distance recherchée est $HA = \frac{|< \overrightarrow{IA}, \vec{u} >|}{\|\vec{u}\|} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Q96. Soit (A, B) un couple de points du plan. Donner le lieu des points vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Correction : C'est le cercle de diamètre $[A, B]$. En effet notons I le milieu de $[A, B]$ et r la distance IA. On a (bilinéarité du produit scalaire) : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB} = MI^2 - r^2$ (car $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$). D'où le résultat.
Autre méthode : On passe en coordonnées : $A(a,b)$ et $B(c,d)$ et $M(x,y)$. On note $I\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ le milieu de $[A, B]$.
Alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-c) + (y-b)(y-d) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+d}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 - (ac+bd)$ en reconstituant des identités remarquables.
Pour retrouver conclure, prouver que $\left|\left|\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right|\right|^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 - (ac+bd)$ ce qui est aisé et laissé au lecteur.

Q97. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f,g) \in E^2$, on pose $(f \mid g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Pour $i \in \{0,1,2\}$, on note $P_i(x) = x^i$.

(a) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

(b) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.

Correction :

(a) $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale et positif par positivité de l'intégrale.
Enfin $(f|f) = 0 \Rightarrow f = 0$ car $f^2 \geq 0$ et continue.

(b) La famille (P_0, P_1, P_2) est libre car échelonnée en degré.
Pour justifier qu'elle n'est pas orthogonale il suffit de trouver P_i et P_j $(i \neq j)$ tels que $(P_i|P_j) \neq 0$.
Inutile de produire d'autres calculs.
$(P_0|P_2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_0(x)P_2(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x > 0$ par parité et positivité.

Q98. Énoncer et prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace euclidien E, y compris le cas d'égalité.

Correction : Inégalité de Cauchy-Schwarz : Dans E un espace euclidien, pour tout $(x,y) \in E^2$, $|(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.
Comme pour toutes les preuves d'inégalités de Cauchy-Schwarz, on considère $f : t \mapsto ||x+ty||^2$ une fonction d'une variable réelle à valeurs positives. On a $f(t) = (x+ty|x+ty) = ||x||^2 + 2t(x|y) + t^2||y||^2$ ie. $f(t)$ est un trinôme du second degré en t. Ne prenant que des valeurs positives son discriminant $\Delta = 4(x|y)^2 - 4||x||^2||y||^2$ est négatif ou nul, d'où la conclusion.
En cas d'égalité $\Delta = 0$ et f a une racine double pour $t = -\frac{2(x|y)}{2||y||^2}$ ie. $\left|\left|x - \frac{(x|y)}{||y||^2}y\right|\right| = 0$ ie. $x - \frac{(x|y)}{||y||^2}y = 0_E$.
Donc on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Q99. Expliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt et l'appliquer à la famille $((1,0,1), (1,1,1), (-1,1,0))$ pour le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^3$.

Correction : Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base d'un espace euclidien E. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est itératif. On pose $f_1 = \frac{e_1}{||e_1||}$ de sorte que (f_1) est une famille orthonormale. On pose ensuite $f_2' = e_2 - (e_2|f_1)f_1$ de sorte que $(f_2'|f_1) = 0$. Alors (f_1, f_2) où $f_2 = \frac{e_2'}{||e_2'||}$ est orthonormale.
On suppose avoir construit $(f_1, \ldots, f_k)$ orthonormale, on pose $f_{k+1}' = e_{k+1} - (e_{k+1}|f_k)f_k - \cdots - (e_{k+1}|f_1)f_1$ puis $f_{k+1} = \frac{f_{k+1}'}{||f_{k+1}'||}$. La famille $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ est orthonormale par construction : il reste à vérifier $||f_{k+1}|| = 1$ et $(f_i|f_{k+1}) = 0$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

Application : $||(1,0,1)|| = \sqrt{2}$, on pose $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ puis $f_2' = (1,1,1) - \frac{2}{\sqrt{2}}f_1 = (0,1,0)$. Comme $||f_2'|| = 1$ on pose $f_2 = f_2'$. Soit enfin $f_3' = (-1,1,0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)f_1 - 1 \cdot f_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ et donc $f_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Q100. Si F est un sous espace vectoriel de E un espace euclidien, donner la définition de $F^\perp$.
Montrer que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E.

Correction : Par définition $F^\perp = \{g \in E \mid \forall f \in F,\ (g|f) = 0\}$. On peut en déduire que $F^\perp$ est un sev de E.

Soit $f \in F \cap F^\perp$, on a $(f|f) = 0$ donc $f = 0_E$. La somme $F + F^\perp$ est donc directe.
Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F que l'on peut supposer orthogonormale et $e \in E$ un vecteur.
On pose $e' = (e|f_1)f_1 + \dots + (e|f_n)f_n \in F$ et $e'' = e - e'$. Il ne reste qu'à montrer $e'' \in F^\perp$.
Par linéarité de $(e''|\cdot)$ il suffit de montrer $(e''|f_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Or $(e''|f_k) = (e|f_k) - (e'|f_k) = (e|f_k) - ((e|f_k)f_k|f_k)$ car $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est orthogonale. D'où $(e''|f_k) = (e|f_k) - (e|f_k)||f_k|| = 0$ car $||f_k|| = 1$.
Conclusion : $E = F \oplus F^\perp$.