DNS 1 : pour le mercredi 17 septembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(Moyenne au sens de Cesàro).*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *moyennes de Cesàro* de (u_n) en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

L'objectif est de montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors (s_n) converge aussi vers ℓ.

1° Cas $\ell = 0$. On suppose que (u_n) converge vers 0.
Soit $\epsilon > 0$.

(a) Justifier qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1,\ |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

(b) Montrer qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_2,\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(c) En déduire (en coupant la somme définissant s_n en deux et en utilisant les deux questions précédentes) qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |s_n| \leq \varepsilon$.

(d) En déduire que (s_n) converge vers 0.

2° Cas général : on suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = u_n - \ell$ et $s'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u'_k$.

Exprimer s'_n en fonction de s_n et en déduire que (s_n) converge aussi vers ℓ.

3° Montrer que la réciproque est fausse, on pourra considérer $(u_n) = ((-1)^n)$.

4° *Application* : Soit $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

(a) Déterminer la nature et la limite éventuelle de (u_n).

(b) Déterminer la nature et la limite éventuelle de la suite (v_n) où $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

(c) En utilisant le résultat qu'on vient de montrer sur la moyenne de Cesàro de (v_n), déterminer un équivalent de (u_n).

Exercice 2 *(calcul de la somme de $\sum \frac{1}{n^2}$).*
Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

1° Montrer que $t \mapsto \text{cotan}^2 t$ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle à déterminer.

2° Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons la partie imaginaire de $\dfrac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}(t)}$, trouver un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)} = Q_n\left(\text{cotan}^2(t)\right)$.

3° Déterminer alors les racines de Q_n, que l'on notera x_k pour $k \in [\![1,n]\!]$.

Justifier, sans calcul, les relations $3\sum_{k=1}^{n} x_k = n(2n-1)$ et $(2n+1)\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$.

4° a) Montrer $1 + \text{cotan}^2(t) = \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ en fonction de n.

b) Montrer : $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ \text{cotan}^2(t) \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5° En procédant comme dans la preuve de la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$, montrer que le reste d'ordre n de cette série est majoré par $\frac{1}{n}$. Écrire alors un script Python donnant une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ avec 5 décimales exactes et comparer avec la valeur trouvée en 4° (b)).

Exercice 3 *(critère et transformation d'Abel).*
On considère deux suites $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on suppose que :

(i) il existe un réel positif M tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq M$;

(ii) (b_n) est positive, décroissante et de limite nulle (*remarque* positive est de trop).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

1° Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$.

2° En déduire que $\sum a_n b_n$ est convergente.

3° Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n+1}$.