

## DS 1 : samedi 6 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérottera aussi ses pages.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**Exercice 1.**

- 1° Donner la formule du binôme de Newton.
- 2° Donner, pour  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , la factorisation (en deux facteurs) de  $a^2 - b^2$  et de  $a^3 - b^3$ .
- 3° (a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de  $f : x \mapsto \ln(x^2 - 4)$  et donner  $f'$   
 (b) Donner la dérivée de  $\tan$  et de  $\arctan$  en précisant les domaines de dérivabilité.  
 (c) Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner la dérivée de la fonction  $g : x \mapsto (u(x))^n$ .  
 (d) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de  $h : x \mapsto \sqrt{-x^2 + x + 2}$  et donner  $h'$ .

**Exercice 2.**

- 4° Énoncer les formules donnant  $\cos(a + b)$ ,  $\sin(a + b)$  en fonction de  $\cos(a)$ ,  $\cos(b)$ ,  $\sin(a)$  et  $\sin(b)$ . En déduire la formule donnant  $\tan(a + b)$  en fonction de  $\tan(a)$  et  $\tan(b)$ .
- 5° Donner le DL<sub>3</sub> en 0 de  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto \ln(1 + x)$  et le DL<sub>2</sub> en 0 de  $x \mapsto \sqrt{1 + x}$ .
- 6° Calculer le développement limité de  $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$  et de  $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- 7° (a) Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$  sans symbole de sommation.

En déduire les conditions de convergence et la valeur de la somme de la série  $\sum x^n$  puis la valeur de  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{3^{k+1}}$ .

- (b) En dérivant  $P_n$  montrer que  $\sum kx^{k-1}$  converge vers  $\frac{1}{(1-x)^2}$  si  $x \in ]-1, 1[$ .

Application : calculer  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-1}^N (2n-3)e^{-3n}$ .

- 8° (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.  
 (b) Application : si  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction continue, alors  $f$  possède au moins un point fixe sur  $[0, 1]$ , c'est-à-dire :  $\exists x_0 \in [0, 1] / f(x_0) = x_0$ .  
 (c) On considère  $g : x \mapsto \sqrt{1 - x^3/2} - x$ , écrire un script **Python** fournissant, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée au dix-millième d'un zéro de  $g$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .
- 9° Déterminer une primitive de  $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$  et de  $g : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ .
- 10° Montrer que 1 est racine de  $P = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$  et déterminer sa multiplicité.
- 11° Montrer que l'application  $\Delta : P \mapsto XP' - P$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ . Que vaut  $\Delta(1)$  et  $\Delta(X)$  ?
- 12° Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ .  
 Démontrer que  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Donner sa dimension.  
 Soit  $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Démontrer que  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En donner une base.  
 Démontrer que  $E = V \oplus W$ .

- 13° Inverser la matrice  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3.**

- 14° Exprimer  $\cos(5\theta)$  comme un polynôme en  $\cos(\theta)$ .
- 15° Montrer que  $\sinh$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et que sa bijection réciproque est  $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .
- 16° On note  $X$  le résultat du lancer d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité de chacune des faces est proportionnelle à son numéro. Déterminer la loi de  $X$  ainsi que son espérance et sa variance.
- 17° Montrer l'inégalité :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ .
- 18° Donner la matrice de  $s(x, y) = \left(\frac{-x-2y}{3}, \frac{-4x+y}{3}\right)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et dans la base  $((1, -2), (1, 1))$ .