

DS 1 : samedi 6 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1.

1° Donner la formule du binôme de Newton.

2° Donner, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, la factorisation (en deux facteurs) de $a^2 - b^2$ et de $a^3 - b^3$.

3° (a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $f : x \mapsto \ln(x^2 - 4)$ et donner f'

(b) Donner la dérivée de $\tan$ et de $\arctan$ en précisant les domaines de dérivabilité.

(c) Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (u(x))^n$.

(d) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $h : x \mapsto \sqrt{-x^2 + x + 2}$ et donner h' .

Correction :

1° Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2° $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

3° (a) La fonction f est définie sur $D = [-\infty, -2[\cup]2, +\infty]$ et y est dérivable, pour $x \in D$, on a $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$.

(b) $\tan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.
 $\arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

(d) La fonction h est définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $-x^2 + x + 2 \geq 0$, comme ce polynôme de degré 2 s'annule en -1 et en 2 , h est définie sur $[-1, 2]$, elle n'est pas définie ailleurs, ainsi $\mathcal{D}_h = [-1, 2]$.

La fonction h est dérivable pour les $x \in \mathcal{D}_h$ tels que $-x^2 + x + 2 > 0$, elle est donc dérivable sur $] -1, 2[$.
 Pour $x \in] -1, 2[$, on a $h'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x+2}}$

Exercice 2.

4° Énoncer les formules donnant $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. En déduire la formule donnant $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

5° Donner le DL₃ en 0 de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1 + x)$ et le DL₂ en 0 de $x \mapsto \sqrt{1 + x}$.

6° Calculer le développement limité de $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ et de $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

7° (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ sans symbole de sommation.

En déduire les conditions de convergence et la valeur de la somme de la série $\sum x^n$ puis la valeur de $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}}$.

(b) En dérivant P_n montrer que $\sum kx^{k-1}$ converge vers $\frac{1}{(1-x)^2}$ si $x \in] -1, 1[$.

Application : calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-1}^N (2n - 3)e^{-3n}$.

8° (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Application : si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue, alors f possède au moins un point fixe sur $[0, 1]$, c'est-à-dire : $\exists x_0 \in [0, 1] / f(x_0) = x_0$.

(c) On considère $g : x \mapsto \sqrt{1 - x^3/2} - x$, écrire un script **Python** fournissant, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée au dix-millième d'un zéro de g sur l'intervalle $[0, 1]$.

- 9° Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$.
- 10° Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ et déterminer sa multiplicité.
- 11° Montrer que l'application $\Delta : P \mapsto XP' - P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Que vaut $\Delta(1)$ et $\Delta(X)$?
- 12° Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.
Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de E . Donner sa dimension.
Soit $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que W est un sous-espace vectoriel de E . En donner une base.
Démontrer que $E = V \oplus W$.
- 13° Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction :

- 4° On a $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
On en déduit : $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ en divisant numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b$.
- 5° On a : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$,
 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ et
 $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{x^2}{2!} + o_{x \rightarrow 0}(\frac{1}{x^2}) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8!} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- 6° $\ln(1+\sin(x)) = \ln(1+x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)) = (x - \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{6})^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.
 $\ln(1+\cos(x)) = \ln(2 - \frac{x^2}{2!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)) = \ln(2) + \ln(1 - \frac{x^2}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)) = \ln(2) - \frac{x^2}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.
- 7° (a) $P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $P_n(1) = n+1$.
Il suit que la série géométrique converge pour $|x| < 1$ et qu'alors sa somme est $\frac{1}{1-x}$.
Application : $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ cette série géométrique est de raison $\frac{4}{3} > 1$ donc diverge (grossièrement).
- (b) P_n est une fonction polynomiale donc est dérivable et $P'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.
Avec 1°, on a aussi $P'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)^2}$ (si $|x| < 1$) par croissance comparée.
On en déduit donc que la série géométrique dérivée première de raison x , $\sum kx^{k-1}$, converge si et seulement si $|x| < 1$ et que dans ce cas sa somme est $\frac{1}{(1-x)^2}$.
Application : On a $\sum_{n=0}^N (2n-3)e^{-3n} = 2e^{-3} \sum_{n=0}^N n(e^{-3})^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^N (e^{-3})^n$ par linéarité de la somme. On reconnaît alors deux séries géométriques de raison $e^{-3} \in]-1, 1[$, donc convergentes, dont une série dérivée première. Grâce aux formules précédente on obtient : $\sum_{n=-1}^{+\infty} (2n-3)e^{-3n} = (-2-3)e^3 + \frac{2e^{-3}}{(1-e^{-3})^2} - \frac{3}{1-e^{-3}}$.
- 8° (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, si k est entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = k$.
(b) Il s'agit bien évidemment d'appliquer le TVI, reste à trouver la fonction. La voici : $g : x \mapsto f(x) - x$ dont on veut montrer qu'elle s'annule sur $I = [0, 1]$. Cette fonction est bien continue, on a $g(0) = f(0) \geq 0$ (puisque f est à valeurs positives) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 1$ (puisque f est à valeurs dans $[0, 1]$). Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique donc, il existe donc $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$ ie tel que $f(x_0) = x_0$.
(c) On note tout d'abord que g est bien définie et continue sur $[0, 1]$, que $g(0) = 1$ et $g(1) = -1$, ainsi la fonction g possède bien un zéro sur $[0, 1]$. En Python on peut rédiger l'algorithme de dichotomie :
- ```
def g(x):
 return sqrt(1-x**3/2)-x
a,b,eps = 0,1,0.0001
while (b-a)>=2*eps:
 m = (b+a)/2
 if f(m)*f(b)<0:
 a = m
```

else:

b = m

print('la limite de u au dix-millieme près est ',m)

9°  $F : x \mapsto 2\sqrt{x^2 + 1}$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$G : x \mapsto \ln|\ln(x)|$  est une primitive de  $g$  sur  $]0, 1[$  (et sur  $]1, +\infty[$ ).

10° Définition :  $a$  est racine d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de multiplicité  $m$  si  $(X - a)^m$  divise  $P$  mais  $(X - a)^{m+1}$  ne divise pas  $P$ .

Ainsi (c'est juste une reformulation) :  $a$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m$  ssi il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = (X - a)^m Q$  et  $Q(a) \neq 0$ .

Caractérisation :  $a$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m$  ssi  $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$  et  $P^{(m)}(a) \neq 0$ .

On a  $P(1) = 0$ , on a  $P' = 5X^4 - 12X^3 + 6X^2 - 2X + 3$ , ainsi  $P'(1) = 0$ , on a  $P'' = 20X^3 - 36X^2 + 12X - 2$ , ainsi  $P''(1) = -6 \neq 0$ . Donc 1 est racine double de  $P$ .

Alternative : On remarque que  $P(1) = 0$ , on a on fait la division euclidienne de  $P$  par  $X - 1$  et on trouve  $P = (X - 1)Q_1$  avec  $Q_1 = X^4 - 2X^3 - X + 2$ , comme  $Q_1(1) = 0$  on fait la division euclidienne de  $Q_1$  par  $X - 1$  et on trouve  $Q_1 = (X - 1)Q_2$  avec  $Q_2 = X^3 - X^2 - X - 2$ , comme  $Q_2(1) = -3 \neq 0$ , on en déduit que  $P = (X - 1)^2 Q_2$  avec  $Q_2(1) \neq 0$  ainsi 1 est racine double de  $P$ .

11° Tout d'abord  $\Delta$  est bien une application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $\Delta(P + \lambda Q) = X(P + \lambda Q)' - (P + \lambda Q) = XP' - P + \lambda(XQ' - Q) = \Delta(P) + \lambda\Delta(Q)$ , ce qui montre bien que  $\Delta$  est linéaire.

On a  $\Delta(1) = X \cdot 0 - 1 = -1$  et  $\Delta(X) = X \cdot 1 - X = 0$ .

12° Quand un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est donné par un système d'équations il est facile d'en déduire son écriture comme un Vect.

$(x, y, z) \in V \Leftrightarrow z = -x - y$  donc  $V = \{(x, y, -x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$  donc  $V$  est un sev de  $E = \mathbb{R}^3$ .

La famille génératrice précédente est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc est libre par suite c'est une base de  $V$  et donc  $\dim V = 2$ . Directement  $W = \text{Vect}((1, 1, 1))$  donc  $W$  est un sev de dimension 1 de  $E$ .

Il y a plusieurs voies pour montrer  $E = V \oplus W$  :

- montrer que tout  $(x, y, z)$  s'écrit de façon unique comme somme de  $v + w$  où  $v \in V$  et  $w \in W$ .
- montrer que  $V + W$  est de dimension 3 ie. ici que  $V \cap W = \{0\}$  (le plus facile ?)
- ou encore de montrer que la concaténation de bases de  $V$  et  $W$  est une base de  $E$ . Pour cela on peut calculer le déterminant de la matrice  $3 \times 3$  correspondante et montrer qu'il est non nul, ou bien montrer que  $(1, 1, 1)$  n'est pas combinaison linéaire de  $(1, 0, -1)$  et  $(0, 1, -1)$ . Par exemple  $(1, 1, 1) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) \Rightarrow \alpha = \beta = 1$  absurde. Ou encore plus rapide  $(1, 1, 1)$  n'est pas dans le plan  $V$  (évidente puisque  $1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$ ).

13° Plusieurs possibilités ici vu la forme de la matrice.

(a) On applique l'algorithme de Gauss-Jordan dont on ne donne que les étapes (possibles) :  $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ ;  $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$ ;  $L_3 \leftarrow \frac{L_3 - L_2}{4}$  à ce stade la matrice est triangulaire supérieure sans coefficient diagonal nul donc est inversible de même que  $A$ . On poursuit par  $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$  et on finit avec  $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2 - L_3)$ .

(b) On écrit  $M = J + I$  où  $J$  est la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont 1.

Alors  $M^2 = (J + I)^2 = J^2 + 2J + I$  car  $I$  commute avec  $J$ .

Or  $J^2 = 3J$  donc  $M^2 = 5J + I = 5M - 4I$  donc  $M(M - 5I) = -4I$  d'où  $M \left[ \frac{1}{4}(5I - M) \right] = I$ . Dont il suit que  $M$  est inversible d'inverse  $\frac{1}{4}(5I - M)$ .

dans les deux cas on a trouvé  $M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

### Exercice 3.

14° Exprimer  $\cos(5\theta)$  comme un polynôme en  $\cos(\theta)$ .

15° Montrer que  $\text{sh}$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et que sa bijection réciproque est  $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

16° On note  $X$  le résultat du lancer d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité de chacune des face est proportionnelle à son numéro. Déterminer la loi de  $X$  ainsi que son espérance et sa variance.

17° Montrer l'inégalité :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ .

18° Donner la matrice de  $s(x, y) = \left( \frac{-x-2y}{3}, \frac{-4x+y}{3} \right)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et dans la base  $((1, -2), (1, 1))$ .

**Correction :**

14° À partir de la formule de Moivre, des formules d'Euler et du binôme ; un classique :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \operatorname{Re}(e^{5i\theta}) \\ &= \operatorname{Re}[(\cos \theta + i \sin \theta)^5] \\ &= \operatorname{Re}[\cos^5(\theta) + 5i \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 10i^2 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) + 10i^3 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + 5i^4 \cos(\theta) \sin^4(\theta) + i^5 \sin^5(\theta)] \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta\end{aligned}$$

Remplacer alors  $\sin^2 \theta$  par  $1 - \cos^2 \theta$ , développer, simplifier. Pour ainsi obtenir :  $\cos(5\theta) = P_5(\cos(\theta))$  où  $P_5(X) = X^5 - 10X^3(1 - X^2) + 5X(1 - X^2)^2 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$ .

15° On peut faire les deux choses en une en montrant que  $\operatorname{sh} \circ f = f \circ \operatorname{sh} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$  en notant  $f$  la fonction proposée dans l'énoncé. Bien sûr le théorème de la bijection monotone assure que  $\operatorname{sh}$  soit bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . Mais cette méthode présente l'inconvénient de devoir connaître à priori l'expression de la bijection réciproque.

*Autre possibilité* : résoudre  $\operatorname{sh} x = y$  où  $y$  est un réel fixé et  $x$  est une inconnue réel. Optons ici pour cette dernière :

$$y = \operatorname{sh} x \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow 2y = e^x - 1/e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Ce trinôme du 2nd degré en  $e^x$  a pour discriminant  $\Delta = 4(y^2 + 1) > 0$  donc  $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$  l'autre racine est écartée car  $e^x > 0$ . Le résultat est atteint en passant au logarithme :  $\operatorname{sh}^{-1}(y) = x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ .

16° Soit  $p$  la probabilité que le dé tombe sur 1 ie.  $\mathbb{P}(X = 1) = p$ . Alors  $\mathbb{P}(X = k) = kp$  pour tout  $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$  et, comme  $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$ , on trouve l'équation  $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1 \Leftrightarrow 21p = 1$  donc  $p = \frac{1}{21}$ . Ce qui détermine bien la loi de  $X$ .

$$\text{Alors } \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6 \times 21} = \frac{13}{3} \text{ et de même on calcule } \mathbb{V}(X) \text{ via la formule}$$

$$\text{de König-Huygens et la formule de transfert. Tout d'abord on a } \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 k^3 = \frac{6^2 \times 7^2}{21 \times 4} = 21. \text{ Ainsi, } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 21 - \frac{13^2}{3^2} = \frac{20}{9}.$$

17° On pense « bien sûr » au TAF appliqué à la fonction  $f = \sin$  qui est bien dérivable sur  $\mathbb{R}$  et de dérivée  $f' = \cos$  donc majorée en valeur absolue par 1 sur  $\mathbb{R}$ . Enfin prendre  $y = 0$  dans l'IAF pour avoir la conclusion.

*Autre méthode* : Assez clairement il ne faut vérifier le résultat que sur  $[0, 1]$  ( $\sin$  et  $x \mapsto x$  étant impaires on peut se restreindre sur  $\mathbb{R}_+$ , comme  $\sin < 1$  le résultat est vrai pour  $x \geq 1$ ). Il suffit donc de montrer que  $f : x \mapsto \sin x - x$  est négative sur  $[0, 1]$ , sa dérivée est  $x \mapsto \cos x - 1$  qui est négative sur  $[0, 1]$  (car  $\cos \leq 1$ ) qui est un intervalle donc  $f$  est décroissante, or  $f(0) = 0$ , d'où le résultat.

18° On a  $s(1, 0) = (-1/3, -4/3)$  et  $s(0, 1) = (-2/3, 1/3)$ , ainsi  $A = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

On peut aussi, comme c'est la base canonique, utiliser que c'est la matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $s(x, y)$  correspond à  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

La famille proposée est bien une base de  $\mathbb{R}^2$  : les vecteurs ne sont pas colinéaires et au nombre de deux.

La matrice de passage de la base canonique à la base proposée est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  et a pour inverse  $P^{-1} =$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Les formules de changement de base fournissent la matrice demandée } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Alternative* : on aurait tout aussi bien pu calculer les images de  $(1, 2)$  et  $(1, 1)$  par  $s$  puis déterminer leurs coordonnées dans la base  $((1, 2), (1, 1))$  ; surtout ici vu le résultat obtenu :  $s$  est la symétrie d'axe la droite vectorielle engendrée par  $(1, 2)$ .