DNS 1 : pour le mercredi 17 septembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(Moyenne au sens de Cesàro).*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *moyennes de Cesàro* de (u_n) en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

L'objectif est de montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors (s_n) converge aussi vers ℓ.

1° Cas $\ell = 0$. On suppose que (u_n) converge vers 0.
Soit $\epsilon > 0$.

(a) Justifier qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

(b) Montrer qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_2$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(c) En déduire (en coupant la somme définissant s_n en deux et en utilisant les deux questions précédentes) qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |s_n| \leq \varepsilon$.

(d) En déduire que (s_n) converge vers 0.

2° Cas général : on suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = u_n - \ell$ et $s'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u'_k$.

Exprimer s'_n en fonction de s_n et en déduire que (s_n) converge aussi vers ℓ.

3° Montrer que la réciproque est fausse, on pourra considérer $(u_n) = ((-1)^n)$.

4° *Application* : Soit $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

(a) Déterminer la nature et la limite éventuelle de (u_n).

(b) Déterminer la nature et la limite éventuelle de la suite (v_n) où $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

(c) En utilisant le résultat qu'on vient de montrer sur la moyenne de Cesàro de (v_n), déterminer un équivalent de (u_n).

Correction :

1° (a) Ce n'est rien d'autre que la définition de (u_n) converge vers 0 avec $\frac{\varepsilon}{2}$.

(b) On a $(\frac{1}{n})$ qui tend vers 0 et $\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k$ qui est constant par rapport à n, ainsi $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right)$ converge vers 0, l'inégalité est, encore une fois, la convergence de cette dernière suite vers 0 avec $\frac{\varepsilon}{2}$.

(c) Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour $n \geq n_0$, on a : $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n-1} u_k$, ainsi, d'après l'inégalité triangulaire $|s_n| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n-1} u_k\right|$, on a, encore d'après l'inégalité triangulaire et d'après 1°(a) : $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n-1} u_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n-1} |u_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{n-1-n_1+1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (car $n - n_1 \leq n$). Ainsi, en utilisant aussi 1°(b) on a : $|s_n| \leq \varepsilon$.

(d) On vient de montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0$, $|s_n| \leq \varepsilon$, ie que (s_n) converge vers 0.

2° Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $s'_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_n - \ell) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_n - \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ell = s_n - \dfrac{n}{n}\ell = s_n - \ell$. Comme (u'_n) converge vers 0, on en déduit, d'après 1° donc que (s'_n) converge aussi vers 0 et donc que (s_n) converge vers ℓ.

3° Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$, ainsi $s_{2n} = 0$ et $s_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ ainsi la sous suite des termes pair et la sous suite des termes impair de (s_n) convergent vers 0, donc (s_n) converge vers 0.
On a donc une suite divergente dont sa moyenne de Cesàro converge, ce qui montre bien que la réciproque est fausse.

4° (a) Tout d'abord on remarque que si $u_n \in]0,1[$ alors $u_{n+1} \in]0,1[$, comme u_0 est aussi dans $]0,1[$, on en déduit donc par récurrence directe que (u_n) est à valeurs dans $]0,1[$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ ainsi $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, la suite (u_n) est donc décroissante, comme de plus elle est minorée (par 0), elle converge donc vers un certain $\ell \in [0,1]$, en passant à la limite dans la relation de récurrence on en déduit que $\ell = \ell - \ell^2$, ie $\ell = 0$. Ainsi (u_n) converge vers 0.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \frac{1}{u_n(1-u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \frac{1}{1-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(c) Ainsi, d'après 2⁰, la suite (s_n) des moyennes de Cesàro de (v_n) converge aussi vers 1, or pour $n \in \mathbb{N}$, par télescopage, on a : $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}\right) = \dfrac{1}{nu_n} - \dfrac{1}{nu_0}$, comme (s_n) tend vers 1 et comme $(\frac{1}{nu_0})$ tend vers 0, on en déduit donc que $(\frac{1}{nu_n})$ converge vers 1, ie $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2 *(calcul de la somme de $\sum \frac{1}{n^2}$).*
Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

1° Montrer que $t \mapsto \text{cotan}^2 t$ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle à déterminer.

2° Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons la partie imaginaire de $\dfrac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}(t)}$, trouver un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)} = Q_n\left(\text{cotan}^2(t)\right)$.

3° Déterminer alors les racines de Q_n, que l'on notera x_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.
Justifier, sans calcul, les relations $3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n(2n-1)$ et $(2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$.

4° a) Montrer $1 + \text{cotan}^2(t) = \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ en fonction de n.

b) Montrer : $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \text{cotan}^2(t) \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

5° En procédant comme dans la preuve de la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$, montrer que le reste d'ordre n de cette série est majoré par $\frac{1}{n}$. Écrire alors un script Python donnant une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ avec 5 décimales exactes et comparer avec la valeur trouvée en 4° (b)).

Correction :

1° La fonction cotan^2 est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ (à détailler : elle est strictement décroissante + limites).
Remarque : pour montrer la stricte monotonie de cotan^2 on peut, au choix, remarquer qu'elle est dérivable et que $(\text{cotan}^2)' = \frac{-2\cos}{\sin^3} < 0$, ou alors remarquer que c'est la composée de tan (strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ (strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$).

2° Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $\text{Im}\left(\dfrac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}(t)}\right) = \dfrac{1}{\sin^{2n+1}(t)}\text{Im}\left(\cos((2n+1)t) + i\sin((2n+1)t)\right) = \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}$, d'autre part en utilisant la formule de Moivre et en utilisant la formule du binôme de Newton : $e^{(2n+1)it} = \left(e^{it}\right)^{2n+1} = (\cos t + i\sin t)^{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} i^k \sin^k t \cos^{2n+1-k} t$, donc $\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(2n+1)\mathrm{i}t}\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\sin^{2p+1}t\cos^{2n+1-2p-1}t$, ainsi : $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{(2n+1)\mathrm{i}t}}{\sin^{2n+1}(t)}\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\sin^{2p+1-2n-1}t\cos^{2n-2p}t = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p(\mathrm{cotan}^2)^{n-p}(t)$. D'où il suffit de poser $Q_n(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^pX^{n-p}$ ie. (en ré-indexant) : $Q_n(X) = \displaystyle\sum_{q=0}^{n}\binom{2n+1}{2q}(-1)^{n-q}X^q$ (car $\binom{2n+1}{2n+1-2q} = \binom{2n+1}{2q}$ par la formule de symétrie).

3º Q_n est un polynôme de degré n, si on trouve n racines distinctes on les a toutes trouvées. l'égalité $\dfrac{\sin((2n+1))t}{\sin^{2n+1}(t)} = Q_n\left(\mathrm{cotan}^2(t)\right)$ nous amène à trouver les solutions de $\sin((2n+1)t) = 0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on trouve les $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$. En posant $x_k = \mathrm{cotan}^2 t_k$ on a des racines de Q_n, comme cotan^2 est bijective (donc injective) les x_k sont deux à deux distincts. Ce qui montre que les $x_k = \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ sont les racines de Q_n.
Les relations proviennent des relations coefficients/racines, la somme des racines est l'opposé du quotient du coefficient devant X^{n-1} (qui est $-\binom{2n+1}{2n-2} = -\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$) par le coefficient dominant (qui est $\binom{2n+1}{2n} = 2n+1$), c'est donc $\frac{n(2n-1)}{3}$. Le produit des racines quand à lui est la produit de $(-1)^n$ par le quotient du terme constant (qui est $\binom{2n+1}{0}(-1)^n$) par le terme dominant (qui est toujours $2n+1$), c'est donc $\frac{1}{2n+1}$. Ce qui est bien équivalent aux deux relations données.

4º a) On a : $1+\mathrm{cotan}^2 = \frac{\cos^2+\sin^2}{\sin^2} = \frac{1}{\sin^2}$. On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}1+\mathrm{cotan}^2(t_k) = \sum_{k=1}^{n}1+x_k = n+\frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$ (d'après la question précédente).

b) Comme les trois membres de l'inégalité sont positifs (et que la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$) c'est équivalent à $\tan t \geq t \geq \sin t$, ce qui est vrai sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ($\sin t \leq t$ est classique, pour $\tan t \geq t$ on peut étudier la fonction $t \mapsto \tan t - t$, à ce stade un "par une étude de fonction on a : ...", si c'était une première question d'un problème on devrait forcément rédiger l'étude de fonction).
On utilise cet encadrement pour $t = t_k$ et on somme pour k allant de 1 à n, ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cotan}^2(t_k) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2(t_k)}$ Or on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cotan}^2(t_k) = \sum_{k=1}^{n}x_k = \frac{n(2n-1)}{3}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t_k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} = \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2(t_k)} = \frac{2n(n+1)}{3}$ (d'après la question précédente). Il en résulte que : $\displaystyle\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{2n(n+1)}{3}$, les deux extrémités de l'encadrement tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$, ainsi par le théorème d'encadrement on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5º La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc pour $k \in \mathbb{N}^\star$ on a : $\forall t \in [k,k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ donc par croissance de l'intégrale : $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^2}$, donc en sommant pour k allant de $n \in \mathbb{N}^\star$ à $N \in \mathbb{N}^\star$ avec $n \leq N$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^{N+1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}-\frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}$. Comme la série existe on peut prendre la limite quand $N \to +\infty$ et on a : $R_n \leq \frac{1}{n}$. Ainsi R_n est bien majoré par $\frac{1}{n}$ (et minoré par 0).

Code Python :

```
import numpy as np

def zeta2(eps):
    # calcul d'une valeur approchée de zeta(2) à eps>0 près
    # grâce à R_n<=1/n
    S = 1   # somme partielle de rang 1
    # il suffit 1/n<eps pour avoir R_n<eps i.e. S_n approchant zeta(2) à eps près
    # ici while non utile, on peut résoudre : n>1/eps (ne pas oublier n entier) :
    for k in range(2,int(np.floor(1/eps)+1+1)):
        S += 1/k**2
```

```
    return S
print("zeta(2)=",zeta2(10**(-5)))
print("difference avec pi^2/6=",zeta2(10**(-5))-np.pi**2/6)
```

Exercice 3 *(critère et transformation d'Abel).*
On considère deux suites $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on suppose que :

(i) il existe un réel positif M tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq M$;

(ii) (b_n) est positive, décroissante et de limite nulle (*remarque* positive est de trop).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

1° Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$.

2° En déduire que $\sum a_n b_n$ est convergente.

3° Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n+1}$.

Correction :

1° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a (en utilisant $a_k = A_k - A_{k-1}$ pour $k \geq 1$) : $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k + a_0 b_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k + a_0 b_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} + a_0 b_0 = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_0 b_1 + a_0 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$.

2° On a d'une par $|A_n b_n| \leq M b_n$ donc converge vers 0, d'autre part que $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ est convergente, en effet $|A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_k - b_{k1+})$ (car (b_n) décroissante), le membre de droite est le terme général d'une série positive convergente (car télescopique et (b_n) converge), ainsi $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument donc converge. Ainsi $\sum a_n b_n$ converge.

3° On dirait une application pour $a_n = \cos(n\theta)$ et $b_n = \frac{1}{n+1}$, il faut vérifier les hypothèses, on a clairement (b_n) positive décroissante et convergente vers 0, reste à montrer la majoration de (A_n). Il s'avère que le calcul de (A_n) est classique (et déjà traité en sup) : $\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \Re\left(e^{k i\theta}\right)\right| = \left|\Re\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k\right)\right|$. On arrive a une somme géométrique, il faut donc traiter deux cas :

Cas 1 : $e^{i\theta} = 1$ ie. $\theta \equiv 0[2\pi]$, en fait dans ce cas $\cos(n\theta) = 1$, ainsi (A_n) diverge vers $+\infty$, donc la technique ne marche pas. Cependant $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \sum \frac{1}{n+1}$ qui diverge. Ainsi la série diverge.

Cas 2 : $e^{i\theta} \neq 1$ ie. $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, on applique la formule de la somme d'une progression géométrique : $\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right| \leq \left|\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$ (car pour tout complexe u : $\Re(u) \leq |u|$), qui est bien la majoration voulue, on peut donc appliquer le critère d'Abel et la série converge.