

DS 2 : samedi 20 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat numérottera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (le cours et ses méthodes).

1° Cours.

- a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que :

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Montrer que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge et que si la série $\sum u_n$ diverge alors il en est de même pour la série $\sum v_n$.

- b) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses, donner une démonstration pour celles qui sont vraies et un contre-exemple pour celles qui sont fausses. (u_n) et (v_n) désignent deux suites réelles.

(i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2° Application des méthodes du cours.

- a) Déterminer la nature et la valeur de la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$.

- b) En utilisant la règle de d'Alembert, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{4^n n!}$.

- c) Déterminer la nature de $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ et de $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$

- d) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, puis écrire une fonction Python `somme(eps)` calculant la somme de la série à `eps > 0` près.

- e) Soit $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de la suite (R_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Indication : On pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \geq n$, $R_{n,N} = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha}$ et procéder à une comparaison série/intégrale.

Exercice 2 (D'après E3A PSI, Maths 1, 2016).

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

- 1° On prend **dans cette question**, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

- a) vérifier que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

- b) Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ converge. Dans le cas où cela converge on déterminera la valeur de la somme de cette série.

- c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et donner sa somme.

- 2° On prend **dans cette question**, $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.

- a) Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$.

- b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$?

- c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n$.

- d) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$?
- 3° On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.
- a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, na_{2n} \leq u_n$.
- b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_{2n} = 0$.
- c) Démontrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$.
- d) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.
- e) A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?
- 4° On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.
- a) Vérifier que $\forall m \in \mathbb{N}^*, m \leq n, B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.
- b) En déduire que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.
- c) Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?