DS 2⋆ : samedi 20 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Centrale 2011 - MP (Maths 1, partie I et II)

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste[1] : $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Le sujet original contient une troisième partie (polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, cette formule donne le même développement asymptotique mais avec une expression de l'erreur assez satisfaisante) et une quatrième partie (étude de manière plus précise de l'erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes).

Rappels et notations
On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = O(u_n)$ si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |v_n| \leqslant M|u_n|.$$

I] Étude préliminaire

A. Convergence des séries de Riemann

I.A.1 Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

I.A.2 En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

I.A.3 Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

B. Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1 En utilisant l'encadrement de la question I.A.1, montrer que $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

I.B.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

où A_k est un réel vérifiant $0 \leqslant A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

1. On remarquera que, contrairement à l'usage, le premier indice du reste est n (et non pas $n+1$)

I.B.3 En déduire que :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va nous donner une méthode plus rapide.

II] Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

A. Nombres de Bernoulli

II.A.1 Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, la fonction g définie par : $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie :

$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

où les $b_{l,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

II.A.2 Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geqslant 1$, $a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$.

En déduire que $|a_p| \leqslant 1$ pour tout entier naturel p. Déterminer a_1 et a_2.

II.A.3 (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$.

(b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(\mathrm{e}^z - 1)\varphi(z)$.
En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

On admet [2] dans la suite que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$, et que $a_4 = \frac{-1}{720}$.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

B. Formule de Taylor

Soit f la fonction défnie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette question II.B, on fixe un entier naturel non nul p et on note :

$$g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que :

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k).$$

II.B.1 En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leqslant A k^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2 En déduire le développement asymptotique du reste :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$ donnée par :

$$\tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big).$$

II.B.3 Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

2. c'était la question (c)