DS 2* : samedi 20 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Centrale 2011 - MP (Maths 1, partie I et II)

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste[1] : $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Le sujet original contient une troisième partie (polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, cette formule donne le même développement asymptotique mais avec une expression de l'erreur assez satisfaisante) et une quatrième partie (étude de manière plus précise de l'erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes).

Rappels et notations

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = O(u_n)$ si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |v_n| \leqslant M|u_n|.$$

I] Étude préliminaire

A. Convergence des séries de Riemann

I.A.1 Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

I.A.2 En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

I.A.3 Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

Correction :

I.A.1 Pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq a+1$. Pour tout $x \in [k-1, k] \subset [a, +\infty[$, comme f est décroissante on a : $f(x+1) \leq f(k) \leq f(x)$, comme f est continue sur $[k-1, k]$ on peut intégrer l'inégalité, on a ainsi : $\int_{k-1}^{k} f(x+1)\,\mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$. Le changement de variable $t = x+1$ dans la première intégrale donne alors $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$, qui est bien la formule demandée.

1. On remarquera que, contrairement à l'usage, le premier indice du reste est n (et non pas $n+1$)

I.A.2 Tout d'abord si $\alpha \leq 0$ alors $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ (tend vers 1 si $\alpha = 0$, vers $+\infty$ si $\alpha < 0$), ainsi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement si $\alpha \leq 0$.
Si $\alpha > 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, ainsi les inégalités de I.A.1 s'appliquent.
Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, on somme les inégalités de I.A.1 pour k allant de 2 à n et on obtient(en rajoutant 1 à tout le monde et en appliquant la relation de Chasles) : $1 + \displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{n^\alpha}\mathrm{d}t$.
Si $\alpha \in]0,1[$, on a $\int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_2^{n+1} = \frac{1}{(1-\alpha)(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)2^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (puisque $\alpha - 1 < 0$).
Ainsi (S_n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$, on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et ainsi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
Si $\alpha = 1$, on a $\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(n+1) - \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et on a encore que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
Si $\alpha > 1$, on a $\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\alpha-1}$, on en déduit donc que $S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$, ainsi (S_n) est aussi majorée, de plus elle est croissante (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$), elle est donc croissante par théorème de la limite monotone, ie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
On vient donc de montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

I.A.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a : $1 \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ (la première inégalité est immédiate, la seconde a été démontrée dans la question précédente), en faisant tendre n vers $+\infty$ on en déduit donc que : $1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

B. Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1 En utilisant l'encadrement de la question I.A.1, montrer que $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

I.B.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

où A_k est un réel vérifiant $0 \leqslant A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3 En déduire que :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va nous donner une méthode plus rapide.

Correction :

I.B.1 Pour $N \geq n$, on somme les inégalités de I.A.1 pour k allant de n à N et on obtient (en appliquant la relation de Chasles) : $\displaystyle\int_n^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}(\alpha) \leq \int_{n-1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}\mathrm{d}t$.
On a donc (calcul fait en I.A.2) : $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)(N+1)^{\alpha-1}} \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \dfrac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$. Les trois termes de l'inégalité converge quand $N \to +\infty$, ainsi on peut faire tendre $N \to +\infty$ et on obtient : $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \dfrac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$.
On veut montrer que $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ie on veut montrer que $n^\alpha\left(R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right)$ est bornée.

D'après l'inégalité qu'on vient de montrer on a $\left|n^\alpha\left(R_n(\alpha)-\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right)\right| \leq n^\alpha\left(\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right) = \frac{n}{\alpha-1}\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha-1}-1\right) = \frac{n}{\alpha-1}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-1\right) = \frac{n}{\alpha-1}\left(-\frac{1-\alpha}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n})\right) = 1+o(1)$, ce majorant est convergent quand $n\to+\infty$ donc est borné, ce qui montre bien que $R_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+\underset{n\to+\infty}{O}(\frac{1}{n^\alpha})$.

I.B.2 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre $k\in\mathbb{N}^\star$ et $k+1$ donne : $f(k+1)=f(k)+f'(k)+\frac{1}{2}f''(k)+\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{f'''(t)}{2}(k+1-t)^2\,\mathsf{d}t$.

Or pour tout $x>0$, on a $f'(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $f''(x)=\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et $f'''(x)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}}$.

On en déduit donc que :$f(k+1)-f(k)=\dfrac{1}{k^\alpha}-\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}}+A_k$ où $A_k=\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)^2}{t^{\alpha+2}}\mathsf{d}t$. On a, en utilisant que dans l'intégrale $k\leq t\leq k+1$, que : $0\leq A_k\leq\frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}\int_k^{k+1}(k+1-t)^2\mathsf{d}t\leq\frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}\int_k^{k+1}1\mathsf{d}t=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$

I.B.3 Pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$, on a, d'après la question précédente, que $\dfrac{1}{k^\alpha}=f(k+1)-f(k)+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}}-A_k$.
De plus $\sum\frac{1}{k^\alpha}$, $\sum\frac{1}{k^{\alpha+1}}$ convergent (séries de Riemann convergentes), il en va de même pour $\sum f(k+1)-f(k)$ (série télescopique convergente puisque $f(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$) et pour $\sum A_k$ (d'après la majoration de la question précédente et du théorème de comparaison des séries à termes positifs puisque $\sum\frac{1}{k^{\alpha+2}}$ converge). On peut donc sommer cette égalité pour k allant de n à $+\infty$ et on obtient :

$$R_n(\alpha)=-f(n)+\frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1)-\sum_{k=n}^{+\infty}A_k.$$

D'après la question I.B.1, on a $R_n(\alpha+1)=\dfrac{1}{\alpha n^\alpha}+\underset{n\to+\infty}{O}(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}})$.
De plus, en sommant (tout le monde converge) l'inégalité $0\leq A_k\leq\frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$ pour k allant de n à $+\infty$ on a : $0\leq\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}A_k\leq\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}R_n(\alpha+2)$. Toujours en utilisant I.B.1, on a $R_n(\alpha+2)=\frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}+\underset{n\to+\infty}{O}(\frac{1}{n^{\alpha+2}})$. On en déduit donc que $0\leq n^{\alpha+1}\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}A_k\leq\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1}+\underset{n\to+\infty}{O}(\frac{1}{n})\right)$, le membre de droite étant majoré (par exemple car il converge) donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}A_k=\underset{n\to+\infty}{O}(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$.
Il en résulte que : $R_n(\alpha)=\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+\dfrac{1}{2n^\alpha}+\underset{n\to+\infty}{O}(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}})$.

II] Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

A. Nombres de Bernoulli

II.A.1 Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p\in\mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, la fonction g définie par : $g=a_0f+a_1f'+\cdots+a_{p-1}f^{(p-1)}$ vérifie :

$$g'+\frac{1}{2!}g''+\frac{1}{3!}g^{(3)}+\cdots+\frac{1}{p!}g^{(p)}=f'+\sum_{l=1}^{p-1}b_{l,p}f^{(p+l)}$$

où les $b_{l,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

II.A.2 Montrer que $a_0=1$ et que pour tout $p\geqslant1$, $a_p=-\displaystyle\sum_{i=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-i}}{i!}$.

En déduire que $|a_p|\leqslant1$ pour tout entier naturel p. Déterminer a_1 et a_2.

II.A.3 (a) Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}}a_pz^p$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$.

(b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(e^z - 1)\varphi(z)$.
En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.

On admet [2] dans la suite que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$, et que $a_4 = \frac{-1}{720}$.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

Correction :

II.A.1 Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Soit I un intervalle non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Posons $g = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}$, où $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ sont à déterminer (ils devront être uniquement déterminés et ne pas déprendre de f ni de p).

On a : $\sum_{j=1}^{p} \dfrac{g^{(j)}}{j!} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{p-1} \dfrac{a_k}{j!} f^{(k+j)}$, on ré-indexe cette somme double (on parcours les indices (j, k) en diagonale, ie en parcourant les (l, k) où $l = k + j$, l doit donc varier de 1 à $2n - 1$ et à l fixé k doit varier de 0 à $l - 1$) et on obtient $\sum_{j=1}^{p} \dfrac{g^{(j)}}{j!} = \sum_{l=1}^{2p-1} \sum_{k=0}^{l-1} \dfrac{a_k}{(l-k)!} f^{(l)}$.

On garde en tête l'objectif et on coupe alors notre somme pour arriver à $\sum_{j=1}^{p} \dfrac{g^{(j)}}{j!} = a_0 f' + \sum_{l=2}^{p} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \dfrac{a_k}{(l-k)!} \right) f^{(l)} + \sum_{l=p+1}^{2p-1} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \dfrac{a_k}{(l-k)!} \right) f^{(l)} = a_0 f' + \sum_{l=2}^{p} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \dfrac{a_k}{(l-k)!} \right) f^{(l)} + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\sum_{k=0}^{l+p-1} \dfrac{a_k}{(l+p-k)!} \right) f^{(l+p)}$ (remarque : si $p = 1$ les deux sommes sont nulles par convention, de toute façon pour $p = 1$, il est aisé de voire que $a_0 = 1$ convient, on va donc supposer $p \geq 2$).

Pour avoir le résultat on voit qu'on doit poser $a_1 = 1$ et qu'on doit avoir $\sum_{k=0}^{l-1} \dfrac{a_k}{(l-k)!} = 0$ pour tout $l \in [\![2, p]\!]$, ie on doit donc avoir $a_{l-1} = -\sum_{k=0}^{l-2} \dfrac{a_k}{(l-k)!}$ pour tout $l \in [\![2, p]\!]$ ie (en décalant l'indice l de 1 et en ré-indexant) on doit donc avoir $a_l = -\sum_{k=2}^{l+1} \dfrac{a_{l+1-i}}{i!}$ pour tout $l \in [\![1, p-1]\!]$, comme cela doit être vrai pour tout p, cela définit bien une suite (a_n) qui de plus ne dépend d'aucun des autres objets introduit.

On pose ensuite $b_{l,p} = \sum_{k=0}^{l+p-1} \dfrac{a_k}{(l+p-k)!}$ pour avoir la formule escomptée. Ce qui montre que la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$, $a_l = -\sum_{k=2}^{l+1} \dfrac{a_{l+1-i}}{i!}$ convient au problème.

Alternative : Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\exists (b_{1,p}, \ldots, b_{p-1,p}) \in \mathbb{R}^{p-1} \,/\, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C}),\ g = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)} \text{ vérifie } \sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)}$$

Initialisation : pour $p = 1$ il suffit de prendre $a_0 = 1$, ainsi pour tout $g = f$ et on a donc $g' = f'$ et l'égalité est vérifiée.
Comme c'est un cas un peu dégénéré, regardons aussi $p = 2$, pour $g = f + a_1 f'$ on a $g' + \frac{1}{2} g'' = f' + (a_1 + \frac{1}{2}) f'' + \frac{1}{2} a_1 f'''$, on voit donc tout de suite que si $a_1 = \frac{-1}{2}$ alors on a bien (et ce quelque soit f : $g' + \frac{1}{2} g'' = f' - \frac{1}{4} f'''$ ce qui est l'égalité escomptée (avec $b_{1,2} = \frac{-1}{4}$.

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang p, on a donc l'existence de $(a_0, \ldots, a_{p-1})$ et de $(b_{1,p}, \ldots, b_{p-1,p})$.

Posons $a_p = -b_{1,p}$ et pour $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ notons $g = \sum_{k=0}^{p} a_k f^{(k)}$, et $h = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}$ (cette fonction h est la

2. c'était la question (c)

"fonction g de l'hypothèse de récurrence"). On a $g = h - b_{1,p} f^{(p)}$.

L'hypothèse de récurrence donne $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{h^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)}$. Ainsi :

$$\sum_{j=1}^{p+1} \frac{g^{(j)}}{j!} = \sum_{j=1}^{p} \frac{h^{(j)}}{j!} + \frac{1}{(p+1)!} h^{(p+1)} - b_{1,p} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{f^{(p+j)}}{j!}.$$

Par hypothèse de récurrence on a donc :

$$\sum_{j=1}^{p+1} \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{p} a_k f^{(k+p+1)} - b_{1,p} f^{(p+1)} - b_{1,p} \sum_{j=2}^{p+1} \frac{f^{(p+j)}}{j!}.$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{j=1}^{p+1} \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{l=2}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{p} a_k f^{(k+p+1)} - \sum_{j=2}^{p+1} \frac{b_{1,p} f^{(p+j)}}{j!}.$$

On voit ainsi que dans le membre de droite il n'y a que f' et les dérivées d'ordre supérieur à $p+2$ de f qui apparaissent et que les coefficient devant ces dérivées sont indépendantes de f, ie que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p+1} \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{l=1}^{p} b_{l,p+1} f^{(l+p+1)}$, ce qui est bien la forme désirée, ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

II.A.2 Soit (a_n) une suite répondant à la question précédente, montrons que c'est celle qu'on a trouvé (ie montrons l'unicité de cette suite (a_n)).

Soit $p \in \mathbb{N}^\star$, il existe donc des coefficients $b_{l,p}$ tels que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ on ait : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$. Or le calcul de la question précédente montre que $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = a_0 f' + \sum_{l=2}^{p} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{a_k}{(l-k)!} \right) f^{(l)} + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\sum_{k=0}^{l+p-1} \frac{a_k}{(l+p-k)!} \right) f^{(l+p)}$.

On en déduit donc que $\displaystyle 0 = (a_0 - 1) f' + \sum_{l=2}^{p} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{a_k}{(l-k)!} \right) f^{(l)} + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\left(\sum_{k=0}^{l+p-1} \frac{a_k}{(l+p-k)!} \right) - b_{l,p} \right) f^{(l+p)}$.

Cette égalité doit être vérifiée pour tout f, en particulier pour $f : x \mapsto x^p$, on doit donc avoir : $\displaystyle 0 = (a_0 - 1) p x^{p-1} + \sum_{l=2}^{p} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{a_k}{(l-k)!} \right) \frac{p!}{(p-l)!} x^{p-1}$, or un polynôme est nul ssi tous ses coefficient sont nuls, ce qui montre que $a_0 = 1$ et que pour tout $l \in [\![2, p]\!]$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} \frac{a_k}{(l-k)!} = 0$, la suite (a_n) coïncide donc bien avec celle trouvée à la question précédente.

On trouve directement que $a_1 = \frac{-a_0}{2} = \frac{-1}{2}$ et $a_2 = \frac{-a_1}{2} + \frac{-a_0}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Reste à montrer que : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|a_p| \leq 1$. Procédons par récurrence forte : C'est le cas pour a_0 (et même a_1 et a_2 qu'on vient de calculer), supposons que pour un $p \in \mathbb{N}$ fixé on a, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ que $|a_k| \leq 1$, comme $\displaystyle a_{p+1} = -\sum_{i=2}^{p+2} \frac{a_{p+2-i}}{i!}$ on en déduit que $\displaystyle |a_{p+1}| \leq \sum_{i=2}^{p+2} \frac{|a_{p+2-i}|}{i!} \leq \sum_{i=2}^{p+2} \frac{1}{i!} = \left(\sum_{i=0}^{p+2} \frac{1}{i!} \right) - 2$, or $\displaystyle\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right)_n$ est une suite croissante qui converge vers e, elle est donc majorée par e, on en déduit donc que $\displaystyle\sum_{i=2}^{p+2} \frac{1}{i!}$ est majoré par $\mathrm{e} - 2$ qui est bien plus petit que 1, ainsi $|a_{p+1}| \leq 1$ et notre propriété est bien héréditaire.

On a bien montré, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que $|a_p| \leq 1$.

II.A.3 (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $|a_p z^p| \leq |z|^p$, or $\sum |z|^p$ (série géométrique de raison $|z| < 1$), ainsi, par théorème de comparaison, $\sum a_p z^p$ converge absolument donc converge.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, les série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n!}$ et $\sum_{p\geq 0} a_p z^p$ convergent absolument donc le produit de Cauchy $\sum w_n$ de ces deux séries converge aussi absolument et $(\mathrm{e}^z - 1)\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$, or pour tout $n \geq 1$, $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k!} a_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) z^n$, or si $n \geq 2$ on a $w_n = \left(a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) z^n = 0$ (d'après II.A.2) et $w_1 = a_0 = 1$, ce qui montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = z$, il en résulte (puise $\mathrm{e}^z \neq 0$ pour z tel que $|z| < 1$ puisque l'exponentielle ne vaut 1 que pour les complexes de la forme $2\mathrm{i}k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$) donc que $\varphi(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

(c) (question enlevée). Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ on a $\varphi(x) - a_1 x = \varphi(x) + \frac{x}{2} = \frac{x(1+\mathrm{e}^x)}{2(\mathrm{e}^x - 1)}$, ainsi $x \mapsto \varphi(x) - a_1 x$ est une fonction paire, or $\varphi(x) - a_1 x = 1 = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k x^k$, par unicité du DSE on en déduit $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 1$.
Pour le calcul de a_4 on peut, au choix, utiliser la formule de récurrence ou un DL de φ en 0 et on trouve $a_4 = \frac{-1}{720}$.

B. Formule de Taylor

Soit f la fonction défnie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.
Dans cette question II.B, on fixe un entier naturel non nul p et on note :

$$g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que :

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k).$$

II.B.1 En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leqslant A k^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2 En déduire le développement asymptotique du reste :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\right) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$ donnée par :

$$\tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\right).$$

II.B.3 Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

Correction :

II.B.1 Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $2p$ à g entre $k \in \mathbb{N}^\star$ et $k+1$ et on a : $g(k+1) - g(k) = \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{k!} + \int_k^{k+1} \frac{g^{2p+1}(t)}{(2p)!}(k+1-t)^{2p} \mathrm{d}t$.
On utilise alors le résultat de II.A.1 et on a l'existence de coefficients $b_{l,p}$ tels que : $g(k+1) - g(k) = f'(k) + \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{g^{2p+1}(t)}{(2p)!}(k+1-t)^{2p} \mathrm{d}t$.
Or pour tout $x > 0$, $f'(x) = x^{-\alpha}$, ainsi pour tout $q \geq 2$ et $x > 0$, $f^{(q)}(x) = \frac{-\alpha(-\alpha-1)\dots(-\alpha-q+2)}{x^{\alpha+q-1}} = (-1)^{q-1} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q-2)}{x^{\alpha+q-1}}$.
On a donc : $R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} (-1)^{2p} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-2)}{k^{\alpha+2p+l-1}} + \frac{1}{(2p)!} \int_k^{k+1} (k + 1 -$

$t)^{2p}.(-1)^{2p+1-1}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+1-2)}{t^{\alpha+2p}}\mathsf{d}t$.

On majore maintenant $|R(k)|$ avec l'inégalité triangulaire, pour cela on utilise que $\left|\displaystyle\sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p}(-1)^{2p}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-2)}{k^{\alpha+2p+l-1}}\right| \leq \dfrac{1}{k^{2p+\alpha}}\displaystyle\sum_{l=1}^{2p-1}|b_{l,p}|\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-2)}{k^{l-1}} \leq \dfrac{A_1}{k^{2p+\alpha}}$

où on a posé $A_1 = \displaystyle\sum_{l=1}^{2p-1}|b_{l,p}|\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-2)$ (en effet pour $l\geq 1$ on a $\frac{1}{k^{l-1}}\leq 1$). On remarque que A_1 ne dépend que de f (ie de α) et de p et ne dépend pas de k.

On utilise aussi que $\left|\dfrac{1}{(2p)!}\displaystyle\int_k^{k+1}(k+1-t)^{2p}.(-1)^{2p+1-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+1-2)}{t^{\alpha+2p}}\mathsf{d}t\right| = \dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p-1)}{(2p)!}\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)^{2p}}{t^{\alpha+2p}}\mathsf{d}t$. Or si t est compris entre k et $k+1$ alors $0\leq k+1-t\leq 1$ et $\frac{1}{t^{\alpha+2p}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+2p}}$. Ainsi, en posant $A_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p-1)}{(2p)!}$ (ne dépend pas de k, on trouve $\left|\dfrac{1}{(2p)!}\displaystyle\int_k^{k+1}(k+1-t)^{2p}.(-1)^{2p+1-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+1-2)}{t^{\alpha+2p}}\mathsf{d}t\right|\leq \dfrac{A_2}{k^{\alpha+2p}}$.

Il en résulte, en posant $A = A_1 + A_2$ (indépendant de k), que pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$: $|R(k)| \leq \frac{A}{k^{\alpha+2p}}$, qui est bien ce qui était demandé.

II.B.2 Le cas $p=1$ a déjà été fait en I.B.1 (et l'expression de la formule de cette question pour $p=1$ ne me semble pas claire). Supposons donc $p\geq 2$.

Pour $k\in\mathbb{N}^\star$, $f'(k) = \frac{1}{k^\alpha}$, on somme alors l'égalité $g(k+1)-g(k) = f'(k)+R(k)$ pour k allant de $n\geq 1$ à $N\geq n$ et on trouve (télescopage) : $\displaystyle\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha}+\sum_{k=n}^{N}R(k) = g(N+1)-g(n)$.

La question précédente montre que $\sum R(k)$ converge absolument donc converge par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum\frac{1}{n^{2p+\alpha}}$, de plus en sommant cette même inégalité pour k allant de n à $+\infty$ (possible car les deux membres sont convergents) on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}R_k \leq AR_n(2p+\alpha)$, en utilisant la question I.B.1 on a alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}R_k \leq \frac{A}{2p+\alpha-1)n^{2p+\alpha-1}}+O(\frac{1}{n^{2p+\alpha}})$. Ceci montre que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}R_k = O(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}})$

Comme pour tout $q\in\mathbb{N}$, $f^{(q)}(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on en déduit que g tend aussi vers 0 en $+\infty$.

On fait tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité au dessus et on trouve $R_n(\alpha) = -\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}R(k)-g(n) = -g(n)+O(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}})$. Ce qui est la formule demandée.

II.B.3 On a $R_n(3) = -a_0f(n)-a_1f'(n)-a_2f''(n)-a_3f'''(n)-a_4f^{(4)}(n)+O(\frac{1}{n^8})$.
Or $f(n) = \frac{-1}{2n^2}$, $f'(n) = \frac{1}{n^3}$, $f''(n) = \frac{-3}{n^4}$ et $f'''(n) = \frac{12}{n^5}$ et $f^{(4)}(n) = \frac{-60}{n^6}$.
De plus on a déjà calculé que : $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{-1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{12}$, $a_3 = 0$ et $a_4 = \frac{-1}{720}$.
On en déduit donc que $R_n(3) = \frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{12n^6}+O(\frac{1}{n^8})$.