DNS 2 : pour le mercredi 8 octobre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(Problème : Séries de Pile ou Face).*
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $q = 1-p$. On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté. Pour décrire la succession de n lancers, on introduit la notion de séries de lancers amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi, la première série est de longueur $m \in [\![1, n-1]\!]$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)$-ième l'autre côté, et de longueur n si les n lancers ont amené le même côté de la pièce. Si la longueur de la première série est égale à $m < n$, la deuxième série commence au $(m+1)$-ième lancer et se termine au lancer précédant un changement de côté s'il y a au moins un deuxième changement de côté au cours des n lancers, sinon on dit qu'elle est de longueur $n - m$. On peut définir de même les séries suivantes.

Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou face au bout de n lancers. Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, on note P_i l'événement « le i-ième lancer amène pile » et F_i l'événement contraire.

Les parties sont indépendantes.

Partie A : Étude des longueurs de séries

On considère dans cette sous-partie que $m \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in \mathbb{N}^\star$.

A.1) On note L_1 la longueur de la première série.

a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$ (ensemble des valeurs prises par L_1).

b) On suppose que $m < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+1$. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m)$.

c) On suppose maintenant que $m = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = n)$.

d) Vérifier que $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(L_1 = m) = 1$.

A.2 On note L_2 la longueur de la deuxième série, s'il y en a une, et on pose $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série.

a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.

b) On suppose que $m+k < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+k+1$. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

c) On suppose que $m + k = n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.

d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(L_2 = k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

e) Calculer $\mathbb{P}(L_2 = 0)$

Partie B : Étude du nombre de séries lors de n lancers

On considère dans toute cette sous-partie que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = 1/2$. On suppose que l'on effectue n $(n \geq 3)$ lancers indépendants et on note N_k le nombre de séries lors des k premiers lancers $(k \leq n)$.

Par exemple, si on prend $n = 11$ et si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP (F désignant face et P pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_{11}$: $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$, $N_3(\omega) = \ldots = N_6(\omega) = 2$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$ et $N_9(\omega) = \ldots = N_{11}(\omega) = 4$. On admettra que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, N_k est une variable aléatoire sur Ω_n.

B.1) Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

B.2) Déterminer $N_n(\Omega_n)$, puis calculer les valeurs de $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.

B.3) **Fonctions génératrices de N_n**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour $s \in [0,1]$, $G_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)s^k$.

a) Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

b) Que représente $G_n'(1)$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

On admet que l'on obtiendrait de même :

$$\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}).$$

Montrer alors que $\mathbb{P}(N_n = k) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)$.

d) Soit $n \geq 2$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$.
Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$.

e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n lancers.

Exercice 2 *(Fonction de répartition)*.
On étudie dans cet exercice la fonction de répartition d'une var X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Définition : La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

1° Résultats généraux (X suit une loi discrète quelconque). Démontrer les assertions suivantes.

a) F_X est croissante.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

c) F_X est continue à droite en chaque réel.

d) F_X possède une limite à gauche et à droite en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X = x_0)$.

2° Propriété fondamentale de la fonction de répartition.

a) Que dire de F_X et F_Y lorsque X et Y ont même loi ?

b) Montrer que $(F_X = F_Y)$ implique que X et Y ont même loi.

3° Une utilisation de la fonction de répartition : la loi du max de deux var indépendantes.

a) Soit X et Y deux var indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $Z = \max(X, Y)$. Démontrer que Z est une var.

b) Déterminer F_Z en fonction de F_X et F_Y.

c) Déterminer F_X puis F_Z et enfin la loi de Z lorsque $X \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$.

Exercice 3 *(Lemme de Borel-Cantelli)*.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit (A_n) une suite d'événements. On note A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n.

1° Posons $\limsup A_n = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$, prouver que $A = \limsup A_n$ et que $A \in \mathcal{A}$.

2° Montrer que si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge alors $\mathbb{P}(A) = 0$.

3° *Une application :* Soit $\alpha \in]1, +\infty[$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de var indépendantes telles que Z_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que l'événement « la suite des (Z_n) est nulle à partir d'un certain rang » est quasi-certain.

Exercice 4 *(Lemme de Borel-Cantelli, suite)*.
Avec les notations de l'exercice précédent. On suppose maintenant que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente et que les les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.

1° Montrer pour $x \in \mathbb{R}$ que $e^x \geq x + 1$ puis en déduire, pour tout entiers $m \leq n$, que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=m}^{n} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum\limits_{m}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

2° Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.