

## DNS 3 : pour le lundi 3 novembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## Correction

**Exercice 1.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (i, j, k)$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1° Quelle est l'image par  $f$  du vecteur  $i + j - k$ ?

2° Démontrer que  $f$  est un projecteur puis déterminer une base de  $\text{Im}(f)$  et  $\ker(f)$ .

3° Quelle est la matrice de  $f$  relativement à une base adaptée à  $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$ ?

**Correction :** Attention  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev, pas nécessairement  $\mathbb{K}^3$  ...

1° On a  $f(i) = 2i + j + k$ ,  $f(j) = -i - k$  et  $f(k) = -i - j$ , ainsi  $f(i + j - k) = f(i) + f(j) - f(k) = 2i + 2j$ .  
On peut aussi utiliser que  $A^t(11-1)$  sont les coordonnées de  $f(i + j + k)$  dans la base  $\mathcal{B}$  et donc  $f(i + j - k) = 2i + 2j$ .

2° Comme  $A^2 = A$  on a  $f \circ f = f$  donc  $f$  est un projecteur. Pour  $\ker(f)$  on résout en notant  $X$  les coordonnées d'un vecteur  $u$  dans  $\mathcal{B}$  :  $u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow AX = 0$ .

Immédiatement (ou avec le pivot de Gauss) :  $x = y$  et  $x = z$  donc  $\ker(f) = \text{Vect}(i + j + k)$ , pour l'image on sait que dans le cas d'un projecteur  $\text{Im}(f) = \ker(f - \text{Id})$ , on résout le système (pivot de Gauss) et on trouve  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(i + j, i + k)$  (*Alternative* qui marche même si ce n'est pas un projecteur : pour déterminer l'image on pourrait utiliser le fait que l'image est engendré par  $f(i) = 2i + j + k$ ,  $f(j) = -i - k$  et  $f(k) = -i - j$ , le théorème du rang nous dit que l'image est de dimension 2, il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires parmi ces trois pour avoir une famille génératrice).

3° Dans une base adaptée à  $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$ , la matrice de  $f$  est  $\text{diag}(1, 1, 0)$  par définition même ; et surtout sans calcul (en effet si  $u \in \text{Im}(f)$  alors  $f(u) = u$  puisque  $f$  est un projecteur).

**Exercice 2.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  par  $\varphi(P) = P(X) + P(X + 1)$ .

1° Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme.

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P_n(X) + P_n(X + 1) = 2X^n$ .

2° Dans cette question uniquement  $n = 2$ .

a) Donner la matrice canoniquement associée à  $\varphi$ . Retrouver alors que  $\varphi \in \text{GL}(\mathbb{R}_2[X])$ .

b) Démontrer que  $\text{Vect}(Q)$  est une droite vectorielle stable par  $\varphi$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi(Q) = \lambda Q$ .  
En déduire les droites stables par  $\varphi$  par résolution de systèmes linéaires.

3° Justifier qu'on peut exprimer  $P_n(X + 1)$  comme combinaison linéaire de  $P_0, \dots, P_n$ .

4° En calculant de deux façons  $P_n(X + 2) + P_n(X + 1)$  déterminer une relation donnant  $P_n$  en fonction de  $P_0, \dots, P_{n-1}$ .

**Correction :**

1° La linéarité est très facile. Comme  $\deg(\varphi(P)) = \deg(P)$  on a  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ .

Le plus délicat ici est de justifier proprement  $\ker(\varphi) = \{0\}$  : Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\varphi(P) = 0$ , on suppose  $P \neq 0$ , posons  $p = \deg(P)$  et notons  $a_p$  son coefficient dominant, ainsi  $a_p \neq 0$ , comme  $\varphi(P) = 0$  on a  $P(X) = -P(X + 1)$ , ce qui montre que  $a_p = -a_p$ , d'où  $a_p = 0$ , ce qui est absurde d'où  $P = 0$ .

Alternative : Soit  $P \in \text{Ker}(\varphi)$ , notons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , on a  $\varphi(P) = 0$  et  $\varphi(P) = P(X) + P(X + 1) = 2a_0 + a_1(X + (X + 1)) + \dots + a_n(X^n + (X + 1)^n)$ , notons pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $Q_k = X^k + (X + 1)^k$  (on a

clairement  $\deg(Q_k) = k$ , ainsi  $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n a_k Q_k$ , la famille  $(Q_0, \dots, Q_n)$  est une famille de polynômes non nul de degré échelonné, c'est donc une famille libre, comme  $\sum_{k=0}^n a_k Q_k = 0$  on en déduit que  $a_0 = \dots = a_n = 0$  et donc que  $P = 0$ .

Ainsi  $\varphi$  est injectif, on a donc montré  $\varphi \in GL(\mathbb{R}_n[X])$  (en effet pour un endomorphisme d'un ev de dimension fini on est bijectif dès qu'on est injectif).

Puisque  $2X^n \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\varphi$  bijectif : il existe un unique antécédent  $P_n$  à ce polynôme par  $\varphi$ .

2° a) Posons  $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ . De  $\varphi(1) = 2$ ,  $\varphi(X) = 1 + 2X$  et  $\varphi(X^2) = 1 + 2X + 2X^2$  vient  $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  donc  $\det(M) = 2^3 \neq 0$  et  $\varphi \in GL(\mathbb{R}_n[X])$ .

b)  $\text{Vect}(Q)$  est stable par  $\varphi \Leftrightarrow \varphi(Q) \in \text{Vect}(Q) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \varphi(Q) = \lambda Q \Leftrightarrow Q \in \ker(\varphi - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$ .

En notant  $\tilde{Q}$  les coordonnées de  $Q$  dans  $\mathcal{C}$ , on résout  $(M - \lambda I_3)\tilde{Q} = 0$ , un système linéaire homogène de matrice  $M - \lambda I_3$ .

Qu'il existe une autre solution que 0 revient à la non inversibilité de  $M - \lambda I_3$  ie à la nullité de son déterminant. Cette matrice étant triangulaire supérieure on a immédiatement  $\det(M - \lambda I_3) = (2 - \lambda)^3$  donc le seul scalaire  $\lambda$  possible est 2 et l'on cherche alors l'ensemble des solutions du système linéaire homogène de matrice  $M - 2I_3$ ; de tête (la matrice  $M - 2I_3$  est de rang 2 et sa première colonne est nulle)  $\text{Vect}(1)$ .

Conclusion :  $\varphi$  ne laisse stable qu'une seule droite vectorielle, celle dirigée par 1.

3° Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , comme  $\varphi(P_k) = 2X^k$  et comme on a montré en 1° que  $\varphi$  préservait les degrés, on a que  $\deg(P_k) = k$ . Donc la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est étagée en degré et est donc libre.

Comme  $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$  ( $k \leq n$ ) et  $\text{Card}(P_k)_{0 \leq k \leq n} = \dim \mathbb{R}_n[X]$ ,  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , donc l'engendre.

Puisque  $P_n(X+1)$  a même degré que  $P_n$ , ie.  $n$ , il s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de la base  $(P_0, \dots, P_n)$ .

4° On suit l'indication,  $P_n(X+2) + P_n(X+1) = 2(X+1)^n$  par définition de  $P_n$  et d'après la question précédente,

il existe  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(X)$  d'où  $P_n(X+2) + P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (P_k(X+1) + P_k(X))$

$$1) + P_k(X)) = \sum_{k=0}^n 2\alpha_k X^k.$$

Ainsi  $\sum_{k=0}^n 2\alpha_k X^k = 2(X+1)^n$ , ainsi (binôme de Newton) :  $\sum_{k=0}^n \alpha_k X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$ , comme deux polynômes sont égaux ssi ils ont les mêmes coefficients (remarque : cela correspond en fait à la liberté de  $(1, \dots, X^n)$ ) on a donc, pour tout  $k$ , que  $\alpha_k = \binom{n}{k}$ .

$$\text{On en tire } P_n = 2X^n - P_n(X+1) = 2X^n - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k = 2X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} P_k - P_n.$$

$$\text{Conclusion : } P_n = X^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} P_k.$$

### Exercice 3 (Noyaux itérés (d'après E3A PSI, 2007)).

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1° (a) Montrer pour tout entier naturel  $i$  et  $j$ ,  $\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$ .

(b) Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $t_m = \dim(\ker(u^m))$ . Prouver l'existence de :  $r = \inf\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$ .

(c) Montrer que :

- (i) Pour tout entier naturel  $m$ , tel que  $m < r$ ,  $\ker(u^m)$  est strictement inclus dans  $\ker(u^{m+1})$ .
- (ii)  $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$ .
- (iii) Pour tout entier  $m \geq r$ ,  $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$ .

2° Soit  $v$  un endomorphisme de  $E$  de rang  $n-1$  tel que  $v^n = 0$ .

(a) Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels et  $w$  la restriction de  $v^q$  à  $\text{Im}(v^p)$ .

- (i) Déterminer  $\text{Im}(w)$ .
- (ii) Prouver que  $\ker(w) \subset \ker(v^q)$ .
- (iii) Vérifier alors que l'on a :  $\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$ .
- (iv) En déduire que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\dim(\ker(v^i)) \leq i$ .
- (v) Démontrer qu'en fait  $\dim(\ker(v^i)) = i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- (b) Prouver que  $v^{n-1} \neq 0$
- (c) En déduire qu'il existe un vecteur  $e$  de  $E$  tel que  $\mathcal{B} = (v^{n-1}(e), \dots, v(e), e)$  soit une base de  $E$ .
- (d) Écrire la matrice de  $v$  dans cette base.

**Correction :**

- 1° (a) Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ . Soit  $x \in \ker(u^i)$ , ainsi  $u^i(x) = 0$ , on a alors  $u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x)) = u^j(0) = 0$ , ainsi  $x \in \ker(u^{i+j})$ , ce qui montre bien que  $\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$ .
- (b) Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , en appliquant la question précédente à  $i = m$  et  $j = 1$  on a  $t_{m+1} \leq t_m$ , ainsi la suite  $(t_m)$  est une suite croissante d'entiers compris entre 0 et  $n$  (car dimension de sev de  $E$ ), ainsi elle converge, or une suite stationnaire d'entiers est stationnaire, ce qui montre que la partie  $\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$  de  $\mathbb{N}$  est non vide, ainsi elle possède un plus petit élément (en particulier une borne inférieure).
- (c) Montrer que :
- (i) Par minimalité de  $r$ , si  $m < r$  alors  $t_m \neq t_{m+1}$  et donc  $t_m < t_{m+1}$  ce qui montre que l'inclusion  $\ker(u^m) \subset \ker(u^{m+1})$  est stricte.
  - (ii) On a déjà montré  $\ker(u^r) \subset \ker(u^{r+1})$ , comme  $\dim(\ker(u^r)) = t_r = t_{r+1} = \dim(\ker(u^{r+1}))$ , on a donc  $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$ .
  - (iii) Montrons par récurrence sur  $m \geq r$  que  $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$ .  
Initialisation : Déjà fait pour  $m = r$ .  
Hérédité : On suppose qu'il existe  $m \geq r$  tel que  $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$ , montrons que  $\ker(u^{m+1}) = \ker(u^{m+2})$ . On a déjà montré  $\ker(u^{m+1}) \subset \ker(u^{m+2})$  en question 1°(a), montrons l'autre inclusion, soit  $x \in \ker(u^{m+2})$ , ainsi  $u^{m+2}(x) = 0$ , ce qu'on peut écrire  $u^{m+1}(u(x)) = 0$ , ainsi  $u(x) \in \ker(u^{m+1})$  donc  $u(x) \in \ker(u^m)$  par hypothèse de récurrence, ie  $u^m(u(x)) = 0$ , ce qui correspond à  $u^{m+1}(x) = 0$  et donc à  $x \in \ker(u^{m+1})$ , ce qui montre bien l'autre inclusion et donc que  $\ker(u^{m+1}) = \ker(u^{m+2})$ .
- On a bien montré, pour  $m \geq r$ , que  $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$ .
- 2° Soit  $v$  un endomorphisme de  $E$  de rang  $n - 1$  tel que  $v^n = 0$ .
- (a) Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels et  $w$  la restriction de  $v^q$  à  $\text{Im}(v^p)$ .
- (i) On a  $\text{Im}(w) = v^q(\text{Im}(v^p))$ , on a donc clairement que  $\text{Im}(w) \subset \text{Im}(v^{p+q})$ , or si  $y \in \text{Im}(v^{p+q})$  alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = v^{p+q}(x) = v^q(v^p(x))$ , et comme  $v^p(x) \in \text{Im}(v^p)$ , on a donc  $y \in \text{Im}(w)$ . Ce qui montre que  $\text{Im}(w) = \text{Im}(v^{p+q})$ .
  - (ii) Soit  $x \in \ker(w)$ , on a ainsi  $x \in \text{Im}(v^p)$  et  $w(x) = 0$ , ainsi  $v^q(x) = 0$  ce qui montre que  $\ker(w) \subset \ker(v^q)$ .  
*Remarque :* On a même  $\ker(w) = \text{Im}(v^p) \cap \ker(v^q)$ .
  - (iii) D'après le théorème du rang appliqué à  $w$  :  $\dim(\text{Im}(v^p)) = \dim(\ker(w)) + \dim(\text{Im}(w))$ , ainsi (d'après les deux questions précédentes) :  $\text{rg}(v^p) \leq \dim(\ker(v^q)) + \text{rg}(v^{p+q})$ . En appliquant maintenant le théorème du rang à  $v^p$  et  $v^{p+q}$ , on a :  $n - \dim(\ker(v^p)) \leq \dim(\ker(v^q)) + n - \dim(\ker(v^{p+q}))$ , ce qui montre bien que l'on a :  $\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$ .
  - (iv) Tout d'abord, comme  $v$  est de rang  $n - 1$ , le théorème du rang donne  $\dim(\ker(v)) = 1$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'inégalité précédente pour  $p = i$  et  $q = 1$  donne  $\dim(\ker(v^{i+1})) \leq \dim(\ker(v^i)) + \dim(\ker(v)) \leq \dim(\ker(v^i)) + 1$ , ainsi par récurrence directe sur  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :  $\dim(\ker(v^i)) \leq i$ .
  - (v) On a  $\dim(\ker(v^n)) = n$  (en effet  $v^n = 0$  et donc  $\ker(v^n) = E$ ), comme  $\dim(\ker(v^{n-1})) \leq n - 1 < n$  on en déduit que le  $r$  de la question 1°(b) est plus grand que  $n$  (comme  $\ker(v^n) = E = \ker(v^{n+1})$  on a même  $r = n$ ), ainsi  $(\dim(\ker(v^i)))_{1 \leq i \leq n}$  est strictement croissante d'après 1°(c)(i), ce qui impose, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , que  $\dim(\ker(v^i)) = i$ .
- (b) Comme  $\dim(\ker(v^{n-1})) = n - 1 \neq n$ , on en déduit que  $v^{n-1} \neq 0$ .
- (c) Soit  $e \in E$  tel que  $v^{n-1}(e) \neq 0$ , notons  $\mathcal{B} = (v^{n-1}(e), \dots, v(e), e)$ , soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\lambda_0 e + \lambda_1 v(e) + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$ . On compose l'égalité par  $v^{n-1}$  et on obtient sur  $\lambda_0 v^{n-1}(e) + 0 = 0$  (car  $v^n = 0$ ) ainsi  $\lambda_0 = 0$  puisque  $v^{n-1}(e) \neq 0$ , si on compose l'égalité initiale par  $v^{n-2}$  on obtient  $\lambda_1 = 0$ , et ainsi de suite jusqu'à obtenir  $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ , ainsi  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $n$  vecteurs dans  $E$  qui est de dimension  $n$ , ainsi  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .
- (d) On trouve la matrice avec des 1 sur la sur-diagonale et des 0 partout ailleurs.