DNS $4^\star$: pour le mercredi 12 novembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (Mines Pont PC, *Maths 1*, 2014) **Somme de projecteurs.**

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices nxn à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et T un endomorphisme non nul de X.

Soit$\mathcal{B}$ une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant T dans cette base. On note $N(T)$ le noyau de T et $R(T)$ l'image de T.

On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité. On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-a-dire tel que $P^2 = P$. On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n$ et $\mathbb{O}$ la matrice nulle.

1 Traces et projecteurs

Si $\mathbb{A}$ est élément de $\mathcal{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \,.$$

1. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ éléments de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$.
2. Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ associée à T est indépendante de la base $\mathcal{B}$.
   On appelle trace de T, notée $\operatorname{tr} T$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.
   Soit P un projecteur de X.
3. Démontrer que $X = R(P) \oplus N(P)$.
4. En déduire que $\operatorname{rg} P = \operatorname{tr} P$.
   On pose $P' = I - P$.
5. Montrer que $R(P') = N(P)$ et que $R(P) = N(P')$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer que si l 'endomorphisme S est une somme finie de projecteurs P_i , $i = 1, \ldots, m$ alors $\operatorname{tr} S \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr} S \geq \operatorname{rg} S$.

2 Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

8. Démontrer qu 'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PTP = \mu P$.
   Soit $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ une base de X adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$.
9. Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant T s 'écrit

$$(1) \qquad \mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{array}\right).$$

   où μ est le nombre réel dont l'existence a été prouvé en question 8 et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n-1}$.
10. Montrer que si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à P', alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n 'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = I - P$.

3 Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l 'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et Tx ne soient pas liés (c 'est-à-dire ne soient pas colinéaires).
12. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{array}\right) \text{ où } \mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-1}.$$

13. En déduire que si $\operatorname{tr} T = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ est nulle.

    Soit t_i, $i = 1, \ldots, n$ une suite de n nombres réels vérifiant $\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{n} t_i$.

14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux t_1 et t_2.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geq 3$, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $LTL = tL$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$.

15. En dimension $n \geq 3$, à l'aide des questions 9 et 10 démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant T s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{array}\right) \text{ où } \mathbb{B} \text{ n'est pas une homothétie.}$$

16. En dimension $n \geq 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i où $i \in [\![1, n]\!]$.

4 Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de X vérifiant $\operatorname{tr} T \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr} T \geq \operatorname{rg} T$. On pose $\rho = \operatorname{rg} T$ et $\theta = \operatorname{tr} T$.

17. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{array}\right)$$

    où $\mathbb{T}_1$ est une matrice de taille $\rho \mathrm{x} \rho$.

    Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie.

18. A l'aide de la question 16 montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{ccc|c} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \\ \mathrm{x} & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & t_\rho & \\ \hline \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \mathbb{O} \\ \mathrm{x} & \cdots & \cdots & \end{array}\right) \text{ où les } t_i,\ i = 1, \rho \text{ sont des entiers non nuls}$$

19. En déduire que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

    On suppose maintenant que T_1 est la matrice d'une homothétie.

20. Démontrer que là encore, T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.