

DS 4 : samedi 22 novembre

4h sans calculatrice

Le candidat numérottera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (*proche du cours et/ou des TDs*).

1° On considère l'application f définie sur $E = \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (3x + 4z, -2x - y - 2z, -2x - 3z)$.

- Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer le noyau de f , puis en déduire son image.
- Déterminer les réels λ tels que $\det(M - \lambda I_3) = 0$. On note λ_1 et λ_2 les deux réels trouvés.
- Déterminer, pour $i \in \{1, 2\}$, les sev $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ (on en donnera des bases).
- Montrer que $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.
- Donner la matrice D de f dans une base adaptée à $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.
- Reconnaître l'application linéaire f .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, donner explicitement M^n .

2° Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la matrice $C_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $C_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ \vdots & & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et on pose

$$c_n = \det(C_n).$$

- Calculer c_1 et c_2 .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre c_{n+2} , c_{n+1} et c_n .
- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de c_n en fonction de n .

3° Étudier la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} \exp(-t) \sin t \, dt$.

4° Justifier de l'éventuelle existence des intégrales suivantes :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \exp(-t^2) \, dt$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \, dt$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$.

Exercice 2 (*Problème d'algèbre linéaire : BANQUE PT 2017 Maths A (sans la partie 3)*).

Pour tous entiers strictement positifs n, p , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n .

Pour une matrice A , ${}^t A$ désigne sa matrice transposée

Partie I

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1° On pose $P_A(X) = \det(XI_3 - A)$, déterminer les deux racines de ce polynôme P_A .
Déterminer (ie trouver des bases) les deux sous espaces $\ker(A - \lambda I_3)$ où λ est une racine de P_A .¹
- 2° Des trois vecteurs trouvés à la question précédente, en déduire une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à déterminer.²
- 3° Déterminer une relation entre A^2 , A et I_n .
En déduire une relation entre A^{n+1} , A^n et A^{n-1} pour tout entier $n \geq 1$.
- 4° Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} &= v_n + 2v_{n-1} \end{cases}$$

- 5° Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n et v_n en fonction de n .

Partie II

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $n \geq 1$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda U + \mu V \quad (1)$$

$$A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \quad (2)$$

$$A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \quad (3)$$

- 1° Exprimer U et V en fonction de A et A^2 .
En déduire que

$$A^3 = (\lambda + \mu) A^2 - \lambda\mu A.$$

- 2° Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

- 3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \dots \circ f$ la $p^{\text{ième}}$ composée de f . Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- a) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^p$.
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu) f^p(x) - f^{p+1}(x).$$

- c) En déduire que $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f$.
d) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^p)$.

Exercice 3 (Intégrale de Gauss d'après E3A PSI 2012).

- 1° Étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

- 2° Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ si $|x| < \sqrt{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

- (a) Donner, sur un même schéma, l'allure des représentations graphiques de f_1 et f_4 .
(b) Étudier la convergence pour tout réel x de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ on notera $f(x)$ la limite éventuelle.
(c) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si u est un réel strictement supérieur à $-n$ alors $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u$.

- (d) Prouver l'existence de $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$.

- (e) **On admet** (les 5/2 peuvent le démontrer) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

1. La question était : Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A

2. La question était : Montrer que la matrice A est diagonalisable

3° On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \int_0^{\pi/2} \cos^k(t) dt$.

(a) Calculer J_0, J_1 et J_2 .

(b) Trouver une relation de récurrence reliant J_k et J_{k+2} .

(c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$.

(d) En déduire une expression de J_{2n+1} faisant intervenir $(n!)^2$ et $(2n+1)!$.

(e) Rappeler la formule de Stirling et déduire de ce qui précède un équivalent de J_{2n+1} lorsque $n \rightarrow +\infty$.

4° À l'aide d'un changement de variable³, donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre J_{2n+1} et u_n .

5° En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 4 (Intégration d'après E3A PC, Maths B, 2010).

1° a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x}$.

(i) Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$; on notera φ ce prolongement.

(ii) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2° On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$.

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$.

i) Montrer, et justifier leur convergence, que : $\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx = 3 \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$.

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que : $I(a) = C \int_a^{3a} \varphi(x) dx + D$ où φ est la fonction définie en 1° b)i).

iii) En déduire la valeur de I .

Exercice 5 (calcul d'intégrales généralisées).

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$.

1° (a) Montrer que $\ln(\sin(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$.

(b) En déduire la convergence de I .

2° Déterminer un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant afin de montrer que $I = J$.

3° Après avoir rappelé la formule de duplication du sinus (ie. $\sin(2a) = \dots$), montrer que (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2t$) : $I + J = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin(u)) du - \frac{\pi}{2} \ln(2)$.

4° Montrer, à l'aide du changement de variable $v = \pi - u$, que $\int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin(u)) du = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(v)) dv$.

5° En déduire I .

3. Indication : $x \mapsto \arcsin(x/\sqrt{n})$