DS $4^\star$: samedi 22 novembre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° On considère l'application f définie sur $E=\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=(3x+4z,-2x-y-2z,-2x-3z)$.

(a) Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer le noyau de f, puis en déduire son image.
(c) Déterminer les réels λ tels que $\det(M-\lambda I_3)=0$. On note λ_1 et λ_2 les deux réels trouvés.
(d) Déterminer, pour $i\in\{1,2\}$, les sev $E_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(f-\lambda_i\mathrm{Id})$ (on en donnera des bases).
(e) Montrer que $E=E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}$
(f) Donner la matrice D de f dans une base adaptée à $E=E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}$.
(g) Reconnaitre l'application linéaire f.
(h) Pour $n\in\mathbb{N}$, donner explicitement M^n.

2° Pour $n\in\mathbb{N}^\star$ on considère la matrice $C_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $C_n=\begin{pmatrix}5&3&0&\dots&\dots&0\\2&5&3&0&&\vdots\\0&2&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&3&0\\\vdots&&0&2&5&3\\0&\dots&\dots&0&2&5\end{pmatrix}$ et on pose $c_n=\det(C_n)$.

(a) Calculer c_1 et c_2.
(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, déterminer une relation de récurrence entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n.
(c) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, l'expression de c_n en fonction de n.

3° Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

4° Justifier de l'éventuelle existence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin t\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$;
(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$.

Exercice 2 *(autour du crochet de Lie)*.

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geq 1$.
Si u et v sont deux endomorphismes de E on note $[u,v]=u\circ v-v\circ u$ (c'est un crochet de Lie).
On se propose d'étudier les couples d'endomorphismes vérifiant $[u,v]=u$

1° **Préliminaires**

(a) Montrer rapidement que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, que pour $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ et en déduire que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.
Ce qui permet de définir la trace d'un endomorphisme, et on aura encore ces deux propriétés.
(b) Pour f et g deux endomorphismes quelconques de E, donner $\mathrm{tr}([f,g])$.
(c) Montrer que si f est un endomorphisme de E et $\alpha\in\mathbb{K}^\star$ alors il n'existe pas d'automorphisme g de E tel que $f+\alpha\mathrm{Id}_E=g^{-1}\circ f\circ g$.
(d) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $k\in\mathbb{N}^\star$.
   (i) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^k)\subset\mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et que si $\mathrm{Ker}(u^k)=\mathrm{Ker}(u^{k+1})$ alors $\mathrm{Ker}(u^{k+1})=\mathrm{Ker}(u^{k+2})$.

(ii) Montrer que si $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ alors $\mathrm{Ker}(u^k) = \{0\}$.
(iii) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^n) = \mathrm{Ker}(u^{n+1})$.
(iv) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^n) \oplus \mathrm{Im}(u^n)$.

2° Soit u et v deux endomorphismes vérifiant $[u, v] = u$.
Montrer que u n'est pas bijectif et que $\mathrm{tr}(u) = 0$

3° Déterminer les couples (u, v) d'endomorphismes vérifiant $[u, v] = u$ dans le cas où $n = 1$.

4° On considère maintenant le cas $n = 2$. Soit u et v deux endomorphismes vérifiant $[u, v] = u$.

(a) En travaillant matriciellement, montrer dans un premier temps que u^2 est une homothétie puis que $u^2 = 0$.
(b) On suppose ici que u n'est pas l'endomorphisme nul.
  (i) Déterminer l'ensemble des éléments $a \in E$ tels que $(a, u(a))$ soit une base de E.
  On fixe $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, u(a))$ est une base de E. Donner la matrice de u par rapport à cette base.
  (ii) On note $W = \{w \in \mathcal{L}(E) \,/\, [u, w] = u\}$.
  Déterminer les matrices relativement à $\mathcal{B}$ des endomorphismes $w \in W$.

5° On retourne maintenant au cas général. Soit (u, v) deux endomorphismes vérifiant $[u, v] = u$.

(a) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, que $[u^k, v] = ku^k$.
(b) On va maintenant montrer que u est nilpotent, pour cela on va montrer que $u^n = 0$.
Pour cela, on procède par l'absurde en supposant que $\dim(\mathrm{Im}\, u^n) \geq 1$.
  (i) Montrer que $\mathrm{Im}(u^n)$ est stable par u^n et v.
  Notons alors f et g les endomorphismes induit par u^n et v sur $\mathrm{Im}(u^n)$.
  (ii) Montrer que f est bijectif et exprimer $[f, g]$ en fonction de f puis conclure.

Exercice 3 *(Intégrale de Gauss d'après* E3A *PSI 2012)***.**

1° Étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

2° Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ si $|x| < \sqrt{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

(a) Donner, sur un même schéma, l'allure des représentations graphiques de f_1 et f_4.
(b) Étudier la convergence pour tout réel x de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ on notera $f(x)$ la limite éventuelle.
(c) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si u est un réel strictement supérieur à $-n$ alors $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^u$.
(d) Prouver l'existence de $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.
(e) **On admet** (les 5/2 peuvent le démontrer) que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

3° On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^k(t) \mathrm{d}t$.

(a) Calculer J_0, J_1 et J_2.
(b) Trouver une relation de récurrence reliant J_k et J_{k+2}.
(c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$.
(d) En déduire une expression de J_{2n+1} faisant intervenir $(n!)^2$ et $(2n+1)!$.
(e) Rappeler la formule de Stirling et déduire de ce qui précède un équivalent de J_{2n+1} lorsque $n \to +\infty$.

4° À l'aide d'un changement de variable[1], donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre J_{2n+1} et u_n.

5° En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 4 *(Intégration d'après* E3A PC*, Maths B,* 2010*)***.**

1° a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.
  (i) Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$; on notera φ ce prolongement.

1. Indication : $x \mapsto \arcsin(x/\sqrt{n})$

(ii) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2° On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\mathsf{d}x$.

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose : $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\mathsf{d}x$.

i) Montrer, et justifier leur convergence, que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\mathsf{d}x = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathsf{d}x$.

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que : $I(a) = C\displaystyle\int_a^{3a} \varphi(x)\mathsf{d}x + D$ où φ est la fonction définie en 1° b)i).

iii) En déduire la valeur de I.

Exercice 5 *(calcul d'intégrales généralisées)***.**

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathsf{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathsf{d}t$.

1° (a) Montrer que $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.

(b) En déduire la convergence de I.

2° Déterminer un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant afin de montrer que $I = J$.

3° Après avoir rappelé la formule de duplication du sinus (ie. $sin(2a) = \ldots$), montrer que (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2t$) : $I + J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathsf{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2)$.

4° Montrer, à l'aide du changement de variable $v = \pi - u$, que $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathsf{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(v))\mathsf{d}v$.

5° En déduire I.