
DNS 5^{*} : pour le mercredi 3 décembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (*partie I de X-ENS PSI 2020*).

Notations

Dans tout l'énoncé, on adopte les notations suivantes :

- Si E et F sont deux ensembles non vides, alors $E \times F$ désigne l'ensemble de tous les couples de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Si $k \geq 1$ est un entier, on note E^k l'ensemble des k -uplets $(x_1, \dots, x_k)$ avec $x_i \in E$ pour $1 \leq i \leq k$.
- Pour tout entier $d \geq 1$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$ défini par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \forall y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

On note $\| \cdot \|$ la norme associée définie sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \|x\| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2},$$

On note $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

- Si E est un ensemble non vide et g une application de E dans $\mathbb{R}$, on note $\inf_{x \in E} g(x)$ la borne inférieure de l'ensemble non vide $g(E)$ défini par :

$$g(E) := \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in E \text{ tel que } y = g(x)\}.$$

On rappelle que cette borne inférieure est bien définie si g est minorée sur E , c'est-à-dire s'il existe un nombre réel m tel que

$$\forall x \in E, g(x) \geq m.$$

De même, on note $\sup_{x \in E} g(x)$ la borne supérieure de $g(E)$. Cette borne supérieure est bien définie s'il existe un nombre réel M tel que :

$$\forall x \in E, g(x) \leq M.$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$, on note $\min(f_1, f_2)$ la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \min(f_1, f_2)(x) = \min(f_1(x), f_2(x)).$$

Si $d \geq 1$ est un entier, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $K \geq 0$ une constante réelle, on dit que f est K -Lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, |f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|.$$

On dit que f est Lipschitzienne s'il existe une constante réelle $K \geq 0$ telle que f est K -Lipschitzienne.

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions *bornées* de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Dans toute la suite, d désignera un entier naturel non nul.

Partie I : approximation par des fonctions Lipschitziennes

Dans toute cette partie, ε et α désignent deux nombres réels avec $\varepsilon > 0$ et $\alpha \geq 1$.

Si $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction minorée, on définit, sous réserve d'existence, la fonction $T_\varepsilon h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, (T_\varepsilon h)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \left(h(y) + \frac{1}{\varepsilon} \|y - x\|^\alpha \right).$$

1° Soit $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction minorée. Montrer que la fonction $T_\varepsilon h$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, (T_\varepsilon h)(x) \leq h(x).$$

2° Soit h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ minorées. On pose $H = \min(h_1, h_2)$.

Montrer que $T_\varepsilon H$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et que $T_\varepsilon H = \min(T_\varepsilon h_1, T_\varepsilon h_2)$.

Indication : pour prouver cette dernière identité, on peut d'abord montrer que $T_\varepsilon H \leq \min(T_\varepsilon h_1, T_\varepsilon h_2)$.

3° On suppose dans cette question uniquement que $\alpha = 2$. Soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, g(x) = \|x\|^2.$$

Calculer $(T_\varepsilon g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Indication¹ : pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, on peut décomposer tout vecteur $y \in \mathbb{R}^d$ sous la forme $y = \lambda x + y_\perp$ avec λ un nombre réel et $y_\perp$ un vecteur orthogonal à x .

4° On suppose ici uniquement que $\alpha = 1$. Soit $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction minorée.

(a) Montrer que $T_\varepsilon h$ est $\frac{1}{\varepsilon}$ -Lipschitzienne.

(b) Montrer que $T_\varepsilon h = h$ si et seulement si h est $\frac{1}{\varepsilon}$ -Lipschitzienne.

(c) On se place dans le cas où $h(x) = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, (T_\varepsilon h)(x) = \min(1, \frac{1}{\varepsilon})\|x\|.$$

(d) Soit $\ell : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\ell(x) = \min(1, \|x\|)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$.

Exprimer $(T_\varepsilon \ell)(x)$ en fonction de ε et x pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

On revient désormais au cas général où $\alpha \geq 1$. Dans toute la suite de cette partie, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une fonction fixée.

5° Montrer que $T_\varepsilon f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $|T_\varepsilon f|_\infty \leq |f|_\infty$.

6° Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On pose

$$A(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d / f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \leq f(x) \right\}.$$

Montrer que $A(x) \neq \emptyset$, que

$$\forall y \in A(x), \|y - x\| \leq (2\varepsilon|f|_\infty)^{1/\alpha}.$$

et que

$$(T_\varepsilon f)(x) = \inf_{y \in A(x)} \left(f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \right).$$

7° On suppose dans cette question que f est continue. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $y_x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$(T_\varepsilon f)(x) = f(y_x) + \frac{1}{\varepsilon}\|y_x - x\|^\alpha.$$

8° Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|f(y) - f(x)| \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha.$$

9° On pose ici et dans toute la suite, sous réserve d'existence,

$$\forall r \in [0, +\infty[, \omega_f(r) = \sup_{(x,y) \in \mathcal{B}_0(r)} |f(x) - f(y)|,$$

où

$$\mathcal{B}_0(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d / \|x - y\| \leq r\}.$$

Démontrer les deux assertions suivantes

(a) Pour tout réel $r \geq 0$, $\omega_f(r)$ est bien défini et

$$\omega_f(r) \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}r^\alpha.$$

(b) La fonction $r \in [0, +\infty[\mapsto \omega_f(r)$ est croissante.

10° Montrer que

$$|T_\varepsilon f - f|_\infty \leq \omega_f(r_\varepsilon) \text{ où } r_\varepsilon = (2\varepsilon|f|_\infty)^{1/\alpha}.$$

11° Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite de fonction $(T_{1/n} f)_{n \geq 1}$ converge uniformément² vers f .

(ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega_f(t) = 0$.

1. rappels : si F sev d'un espace euclidien E alors $E = F \oplus F^\perp$, de plus le théorème de Pythagore s'applique dans un espace euclidien.

2. ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |T_{1/n} f - f|_\infty = 0$