DNS 5* : pour le mercredi 3 décembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(partie I de X-ENS PSI 2020)*.

Notations

Dans tout l'énoncé, on adopte les notations suivantes :

— Si E et F sont deux ensembles non vides, alors $E \times F$ désigne l'ensemble de tous les couples de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Si $k \geq 1$ est un entier, on note E^k l'ensemble des k-uplets $(x_1, \dots, x_k)$ avec $x_i \in E$ pour $1 \leq i \leq k$.

— Pour tout entier $d \geq 1$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$ défini par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\, \forall y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d,\, \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

On note $\| \cdot \|$ la norme associée définie sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\, \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right)^{1/2},$$

On note $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

— Si E est un ensemble non vide et g une application de E dans $\mathbb{R}$, on note $\inf_{x \in E} g(x)$ la borne inférieure de l'ensemble non vide $g(E)$ défini par :

$$g(E) := \{ y \in \mathbb{R} \,/\, \exists x \in E \text{ tel que } y = g(x) \}.$$

On rappelle que cette borne inférieure est bien définie si g est minorée sur E, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel m tel que

$$\forall x \in E,\, g(x) \geq m.$$

De même, on note $\sup_{x \in E} g(x)$ la borne supérieure de $g(E)$. Cette borne supérieure est bien définie s'il existe un nombre réel M tel que :

$$\forall x \in E,\, g(x) \leq M.$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$, on note $\min(f_1, f_2)$ la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E,\, \min(f_1, f_2)(x) = \min(f_1(x), f_2(x)).$$

Si $d \geq 1$ est un entier, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction et $K \geq 0$ une constante réelle, on dit que f est K-Lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,\, |f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|.$$

On dit que f est Lipschitzienne s'il existe une constante réelle $K \geq 0$ telle que f est K-Lipschitzienne.

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions *bornées* de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ on pose

$$|f|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Dans toute la suite, d désignera un entier naturel non nul.

Partie I : approximation par des fonctions Lipschitziennes

Dans toute cette partie, ε et α désignent deux nombres réels avec $\varepsilon > 0$ et $\alpha \geq 1$.
Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction minorée, on définit, sous réserve d'existence, la fonction $T_\varepsilon h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (T_\varepsilon h)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \left(h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \right).$$

1° Soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction minorée. Montrer que la fonction $T_\varepsilon h$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (T_\varepsilon h)(x) \leq h(x).$$

2° Soit h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ minorées. On pose $H = \min(h_1, h_2)$.
Montrer que $T_\varepsilon H$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et que $T_\varepsilon H = \min(T_\varepsilon h_1, T_\varepsilon h_2)$.
Indication : pour prouver cette dernière identité, on peut d'abord montrer que $T_\varepsilon H \leq \min(T_\varepsilon h_1, T_\varepsilon h_2)$.

3° On suppose dans cette question uniquement que $\alpha = 2$. Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ g(x) = \|x\|^2.$$

Calculer $(T_\varepsilon g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
Indication[1] : pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, on peut décomposer tout vecteur $y \in \mathbb{R}^d$ sous la forme $y = \lambda x + y_\perp$ avec λ un nombre réel et $y_\perp$ un vecteur orthogonal à x.

4° On suppose ici uniquement que $\alpha = 1$. Soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction minorée.

(a) Montrer que $T_\varepsilon h$ est $\frac{1}{\varepsilon}$-Lipschitzienne.

(b) Montrer que $T_\varepsilon h = h$ si et seulement si h est $\frac{1}{\varepsilon}$-Lipschitzienne.

(c) On se place dans le cas où $h(x) = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (T_\varepsilon h)(x) = \min(1, \frac{1}{\varepsilon})\|x\|.$$

(d) Soit $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\ell(x) = \min(1, \|x\|)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$.
Exprimer $(T_\varepsilon \ell)(x)$ en fonction de ε et x pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

On revient désormais au cas général où $\alpha \geq 1$. Dans toute la suite de cette partie, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une fonction fixée.

5° Montrer que $T_\varepsilon f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $|T_\varepsilon f|_\infty \leq |f|_\infty$.

6° Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On pose

$$A(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \,/\, f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \leq f(x) \right\}.$$

Montrer que $A(x) \neq \emptyset$, que

$$\forall y \in A(x),\ \|y - x\| \leq (2\varepsilon|f|_\infty)^{1/\alpha}.$$

et que

$$(T_\varepsilon f)(x) = \inf_{y \in A(x)} \left(f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \right).$$

7° On suppose dans cette question que f est continue. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $y_x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$(T_\varepsilon f)(x) = f(y_x) + \frac{1}{\varepsilon}\|y_x - x\|^\alpha.$$

8° Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|f(y) - f(x)| \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha.$$

9° On pose ici et dans toute la suite, sous réserve d'existence,

$$\forall r \in [0, +\infty[,\ \omega_f(r) = \sup_{(x,y) \in \mathcal{B}_0(r)} |f(x) - f(y)|,$$

où

$$\mathcal{B}_0(r) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \,/\, \|x - y\| \leq r \right\}.$$

Démontrer les deux assertions suivantes

1. rappels : si F sev d'un espace euclidien E alors $E = F \oplus F^\perp$, de plus le théorème de Pythagore s'applique dans un espace euclidien.

(a) Pour tout réel $r \geq 0$, $\omega_f(r)$ est bien défini et
$$\omega_f(r) \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon} r^\alpha.$$

(b) La fonction $r \in [0, +\infty[\mapsto \omega_f(r)$ est croissante.

10° Montrer que
$$|T_\varepsilon f - f|_\infty \leq \omega_f(r_\varepsilon) \text{ où } r_\varepsilon = (2\varepsilon |f|_\infty)^{1/\alpha}.$$

11° Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite de fonction $(T_{1/n} f)_{n\geq 1}$ converge uniformément [2] vers f.

(ii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \omega_f(t) = 0$.

Correction :

1° Soit μ un minorant de h. Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \geq \mu + 0$ ainsi l'ensemble $\left\{h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha,\ y \in \mathbb{R}^d\right\}$ est donc une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, elle admet donc une borne inférieure $(T_\varepsilon h)(x)$. Or, le réel $h(x)$ obtenu pour $y = x$ appartient à cet ensemble, on donc $(T_\varepsilon h)(x) \leq h(x)$.

2° Soient μ_1 et μ_2 des minorants de h_1 et h_2 respectivement, puis $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $H(x) = \min(h_1(x), h_2(x)) \geq \mu$, ainsi H est minorée, d'où l'existence de $T_\varepsilon H$.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $H(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \leq h_1(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha$, a fortiori $(T_\varepsilon H)(x) \leq h_1(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha$. Le réel $(T_\varepsilon H)(x)$ est un minorant des $h_1(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha$, or $(T_\varepsilon h_1)(x)$ en est le plus grand minorant, donc $(T_\varepsilon H)(x) \leq (T_\varepsilon h_1)(x)$. Symétriquement, $(T_\varepsilon H)(x) \leq (T_\varepsilon h_2)(x)$.
Ainsi, $(T_\varepsilon H)(x) \leq \min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right)$.

Soit $y \in \mathbb{R}^d$, on peut supposer $h_2(y) \geq h_1(y)$ (l'autre se traite de la même manière), $H(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha = h_1(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \geq (T_\varepsilon h_1)(x)$ donc $H(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \geq \min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right)$.
Le réel $\min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right)$ est donc un minorant de l'ensemble des $H(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha$; par définition de la borne inférieure (le plus grand des minorants) : $\min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right) \leq (T_\varepsilon H)(x)$.

Ce qui montre bien que $(T_\varepsilon H)(x) = \min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right)$, comme x est quelconque on a bien montré $(T_\varepsilon H) = \min\left((T_\varepsilon h_1), (T_\varepsilon h_2)\right)$.

3° Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$. On sait que $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}x \oplus (\mathbb{R}x)^\perp$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y_\perp \in (\mathbb{R}x)^\perp$ tels que $y = \lambda x + y_\perp$.
Ainsi $g(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^2 = \|\lambda x + y_\perp\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|(\lambda - 1)x + y_\perp\|^2$.
Or x et $y_\perp$, sont orthogonaux, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore d'une part à λx et $y_\perp$ ($\|\lambda x + y_\perp\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|y_\perp\|^2$) et à $(\lambda - 1)x$ et $y_\perp$ ($\|(\lambda - 1)x + y_\perp\|^2 = \|(\lambda - 1)x\|^2 + \|y_\perp\|^2$), ce qui permet d'avoir : $g(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \|y_\perp\|^2 + \dfrac{1}{\varepsilon}(\lambda - 1)^2\|x\|^2 + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y_\perp\|^2$.
Posons $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\lambda - 1)^2$, on a donc $g(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2 + \dfrac{1}{\varepsilon}(\lambda - 1)^2\|x\|^2 = \varphi(\lambda)\|x\|^2$.

La fonction φ est une fonction polynômiale de degré deux dont le coefficient devant le terme de degré 2 est positif, elle atteint donc pour un λ_ε tel que $\varphi'(\lambda_\varepsilon) = 0$, ie pour $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}$ et on a $\varphi(\lambda_\varepsilon) = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{1+\varepsilon} - 1\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2}\left(\varepsilon + (-\varepsilon)^2\right) = \frac{1}{1+\varepsilon}$.
On a donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, que $g(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^2 \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\|x\|^2$, de plus on a un cas d'égalité pour $y = \lambda_\varepsilon x$.
La borne inférieure est donc en fait un minimum : $(T_\varepsilon g)(x) = \dfrac{1}{1+\varepsilon}\|x\|^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon} g(x)$.

4° (a) Soient $x, x' \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, par inégalité triangulaire, $h(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x'\| \leq h(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\| + \dfrac{1}{\varepsilon}\|x - x'\|$ donc $(T_\varepsilon h)(x') \leq h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\| + \frac{1}{\varepsilon}\|x - x'\|$ puis $(T_\varepsilon h)(x') - \dfrac{1}{\varepsilon}\|x - x'\| \leq h(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|$ donc par définition de la borne inférieure, $(T_\varepsilon h)(x') - \dfrac{1}{\varepsilon}\|x - x'\| \leq (T_\varepsilon h)(x)$.
Ainsi, $(T_\varepsilon h)(x') - (T_\varepsilon h)(x) \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\|x - x'\|$.

2. ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} |T_{1/n} f - f|_\infty = 0$

Quitte à échanger x et x', on peut supposer que $(T_\varepsilon h)(x') \geq (T_\varepsilon h)(x)$, ainsi : $|(T_\varepsilon h)(x') - (T_\varepsilon h)(x)| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\|x - x'\|$.

(b) Si $h = T_\varepsilon h$, comme d'après (a) $T_\varepsilon h$ est $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne alors h l'est aussi.
Réciproquement, supposons que h soit $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne.
Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $h(x) - h(y) \leq |h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x - y\|$ donc $h(x) \leq h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|$. Comme c'est vrai pour tout y, on peut prendre la borne inférieure sur y et ainsi $h(x) \leq (T_\varepsilon h)(x)$. Or, d'après la question (1), $(T_\varepsilon h)(x) \leq h(x)$. Ce qui montre bien que $(T_\varepsilon h)(x) = h(x)$.
On en déduit que $T_\varepsilon h = h$. L'équivalence est ainsi établie.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
On a $(T_\varepsilon h)(x) = \inf\left\{h(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|\,,\, y \in \mathbb{R}^d\right\} \leq h(0) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|0 - x\| = \dfrac{1}{\varepsilon}\|x\| = \dfrac{1}{\varepsilon}h(x)$, donc $T_\varepsilon h = \min\left(T_\varepsilon h, \frac{1}{\varepsilon}h\right)$. or $\frac{1}{\varepsilon}h$ est $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne (on a même égalité dans la définition de $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne) , ainsi d'après la question (b) : $T_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}h = \frac{1}{\varepsilon}h$. Ainsi $T_\varepsilon h = \min\left(T_\varepsilon h, T_\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}h\right)\right)$, de plus la question (2) permet d'écrire $T_\varepsilon h = T_\varepsilon \min\left(h, \frac{1}{\varepsilon}h\right)$, on pose alors $\mu = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right)$ et on en déduit que $T_\varepsilon h = T_\varepsilon(\mu h)$, comme $\mu \leq \frac{1}{\varepsilon}$ on en déduit donc que μh est $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne, ainsi $T_\varepsilon h = T_\varepsilon(\mu h) = \mu h = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right)h$.

(d) On note $u(x) = 1$ et $h(x) = \|x\|$. Les fonctions u et h sont bien minorées. On a clairement $T_\varepsilon u = u$ par définition. Utilisons la question (2) :
$T_\varepsilon \ell = T_\varepsilon(\min(u, h)) = \min(T_\varepsilon u, T_\varepsilon h) = \min(u, \mu h)$ d'après (c) en notant $\mu = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right)$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^d$,
— si $\varepsilon \leq 1$, $\mu = 1$ donc $(T_\varepsilon \ell)(x) = \min(1, \|x\|) = \ell(x)$
— si $\varepsilon > 1$, $\mu = \frac{1}{\varepsilon}$ donc $(T_\varepsilon \ell)(x) = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\|x\|\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}\|x\| & \text{si } \|x\| < \varepsilon \end{cases}$

5° Comme f est bornée, on peut poser $m = |f|_\infty$. On a donc $-m \leq f \leq m$.
Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$, $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \geq f(y) \geq -m$ donc $(T_\varepsilon f)(x) \geq -m$. De plus avec (1), $(T_\varepsilon f)(x) \leq f(x) \leq m$, ainsi $|T_\varepsilon f| \leq m$, donc $T_\varepsilon f$ est bornée, et $|T_\varepsilon f|_\infty \leq m = |f|_\infty$.

6° L'ensemble $A(x)$ n'est pas vide car il contient x.
Soit $y \in A(x)$. On a donc $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \leq f(x)$, ainsi $\frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \leq f(x) - f(y) \leq 2|f|_\infty$, on en déduit donc que $\|y - x\| \leq (2\varepsilon|f|_\infty)^{1/\alpha}$.
Montrons que $V = \left\{f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha\,,\, y \in \mathbb{R}^d\right\}$ et $W = \left\{f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha\,,\, y \in A(x)\right\}$ possèdent la même borne inférieure, pour celle il suffit de montrer qu'ils possèdent les même minorants.
— Comme $W \subset V$ on en déduit que tout minorant de V est aussi un minorant de W.

— Soit t un minorant de W. Comme $x \in A(x)$, on a $t \leq f(x) + \frac{1}{\varepsilon}\|x - x\|^\alpha$ ie $t \leq f(x)$.
Soit $y \in \mathbb{R}^d$. On veut montrer que $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \geq t$, si $y \in A(x)$ c'est vrai puisque t minore W, si $y \notin A(x)$, ie si $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha > f(x)$, on a alors $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \geq t$. Ce qui montre bien l'inégalité escomptée dans tous les cas, on a bien montré que t minore V.

Ainsi V et W ont les mêmes minorants, et donc la même borne inférieure : $\inf V = \inf W$.
Autrement dit : $(T_\varepsilon f)(x) = \inf\left\{f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha\,;\, y \in A(x)\right\}$.

7° Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour montrer le résultat il suffit de montrer que la borne inférieure de la question précédente est en fait un minimum, pour cela on introduit la fonction $g : y \mapsto f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha$ qui est continue sur $\mathbb{R}^d$, elle l'est donc sur $A(x)$. De plus $A(x)$ est borné (on a montré à la question (6) qu'il était inclus dans la boule fermée de centre x de rayon $(2\varepsilon|f|_\infty)^{1/\alpha}$ et est un fermé (c'est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 0]$ par la fonction continue g).
Or on sait que l'image d'un fermé borné par une fonction continue est bornée et atteint ses bornes, ainsi la fonction g admet un minimum sur $A(x)$, en un point y_x. On a donc $\inf\left\{f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha\,;\, y \in A(x)\right\} = g(y_x)$, la question (6) permet d'en déduire que $(T_\varepsilon f)(x) = g(y_x)$.

8° On remarque que la question (5) implique que $|T_\varepsilon f - f|_\infty$ est bien défini. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^d$, sans perte de généralité on peut supposer $f(y) \leq f(x)$. Par définition de la borne inférieure $(T_\varepsilon f)(x) \leq f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha$, on en déduit donc que $f(x) - f(y) \leq f(x) - (T_\varepsilon f)(x) + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha$, comme (par définition de la norme infinie) $f(x) - (T_\varepsilon f)(x) \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty$ d'où $|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \dfrac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha$.

9° (a) Soit $r \geq 0$. On a $(0, 0) \in \mathcal{B}_0(r)$ donc $\mathcal{B}_0(r)$ n'est pas vide. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}_0(r)$, on déduit de (8) que $|f(x) - f(y)| \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}r^\alpha$. Ainsi $\{|f(x) - f(y)|\,,\,(x, y) \in \mathcal{B}_0(r)\}$ est majoré, non vide, donc admet une borne supérieure, par définition la borne supérieure est inférieure au majorant obtenu, ainsi $\omega_f(r) \leq |T_\varepsilon f - f|_\infty + \dfrac{1}{\varepsilon}r^\alpha$.

(b) Soit $0 \leq r \leq r'$, on a $\mathcal{B}_0(r) \subset \mathcal{B}_0(r')$ (si $\|x-y\| \leq r$ alors $\|x-y\| \leq r'$ puisque $r \leq r'$). Or $\omega_f(r')$ est un majorant de $\{|f(x)-f(y)|\,,\ (x,y) \in \mathcal{B}_0(r')\}$, c'est donc un majorant de $\{|f(x)-f(y)|\,,\ (x,y) \in \mathcal{B}_0(r)\}$, il est donc plus grand que la borne supérieure de ce dernier ensemble, ie $\omega_f(r) \leq \omega_f(r')$.

10° Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
D'après la question (1) on a $(T_\varepsilon f)(x) \leq f(x)$.
Pour tout $y \in A(x)$, la question (6) donne $\|y-x\| \leq r_\varepsilon$, donc $|f(x)-f(y)| \leq \omega_f(r_\varepsilon)$, en particulier $f(y)-f(x) \geq -\omega_f(r_\varepsilon)$, puis $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geq f(y) \geq f(x) - \omega_f(r_\varepsilon)$, on prend la borne inférieure pour $y \in A(x)$ et on en déduit $(T_\varepsilon f)(x) \geq f(x) - \omega_f(r_\varepsilon)$.
On a donc $-\omega_f(r_\varepsilon) \leq (T_\varepsilon f)(x) - f(x) \leq 0$ ainsi $|(T_\varepsilon f)(x) - f(x)| \leq \omega_f(r_\varepsilon)$.

11° D'après la question (9.b), la fonction ω_f est croissante et minorée (par 0) sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, elle admet donc une limite finie $\lambda \geq 0$ en 0.

Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons que $(T_{1/n}f)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^d$ vers f. Pour $n \geq 1$, on applique (9.a) pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et $r = r_n = n^{-2/\alpha}$, on a donc $\omega_f(r_n) \leq |T_{1/n}f - f|_\infty + \dfrac{1}{n}$.
Quand $n \to +\infty$, le membre de gauche de cette inégalité tend vers λ, celui de droite tend vers 0 (puisque $T_{1/n}f$ converge uniformément vers f), ainsi $\lambda \leq 0$, par suite $\lambda = 0$.

Montrons (i) $\Leftarrow$ (ii) : Supposons $\lambda = 0$. Par (10), $|T_{1/n}f - f|_\infty \leq \omega_f\left(\left(2\frac{1}{n}|f|_\infty\right)^{1/\alpha}\right)$ qui tend vers 0 par hypothèse, donc $|T_{1/n}f - f|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où la convergence uniforme.