DS 5 : vendredi 19 décembre

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 ***(proche du cours et/ou des TDs).***

1° Donner dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (en justifiant) une matrice non diagonalisable mais trigonalisable.
Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable.

2° Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera explicitement tous les coefficients de A^n.

3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer χ_f et en déduire le spectre de f.
(b) Déterminer les deux sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
On notera u un vecteur propre de valeur propre 1 et w un vecteur propre de valeur propre 2.
(c) Déterminer un vecteur v tel que $f(v) = v + u$.
(d) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice T de f dans cette base.

4° On considère, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme $P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[(1+\mathrm{i}X)^n - (1-\mathrm{i}X)^n\right]$. Montrer que P_n est à coefficients réels et déterminer son degré.

5° Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 2 *(E3A PC 2020 Ex 1).*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3° Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *(E3A PC 2024 Ex 3).*

Question de cours

1° Soit x un réel positif. Comparer x et x^2.

******

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geq 1$.

2° On pose pour tout $t \geq 1$, $\varphi(t) = \frac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

2.1 Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
2.2 Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ'.
2.3 Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{1+\alpha t^\alpha}{t^2}$.
2.4 En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\forall t \in [n, n+1],\ |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t - n|\,.$$

3° On pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que l'on a : $\forall n \geq 1$, $|u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4° **Convergence de l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

4.1 Démonter que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2 À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5° Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6° En déduire que la série de terme général u_n converge.

7° Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8° Déduire des questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

9° **On suppose que la série** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |a_n|$ **est convergente.**

9.1 Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2 Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On procédera comme à la question **4.2**.

9.3 On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

Exercice 4 *(sur les matrices compagnon : d'après* CCP MP 2001 *Maths 2)*.

Dans cet exercice $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel, et χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée, c'est-à dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(ie la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

1° Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2° Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_p} = kP$.

3° Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4° On note $C_P^\top$ la transposée de la matrice C_P.

a) Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}(C_P^\top)$.

b) Soit λ élément de $\mathrm{Sp}(C_P^\top)$, déterminer (ie. l'écrire avec un Vect) le sous-espace propre de $C_P^\top$ associé à λ.

c) Montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

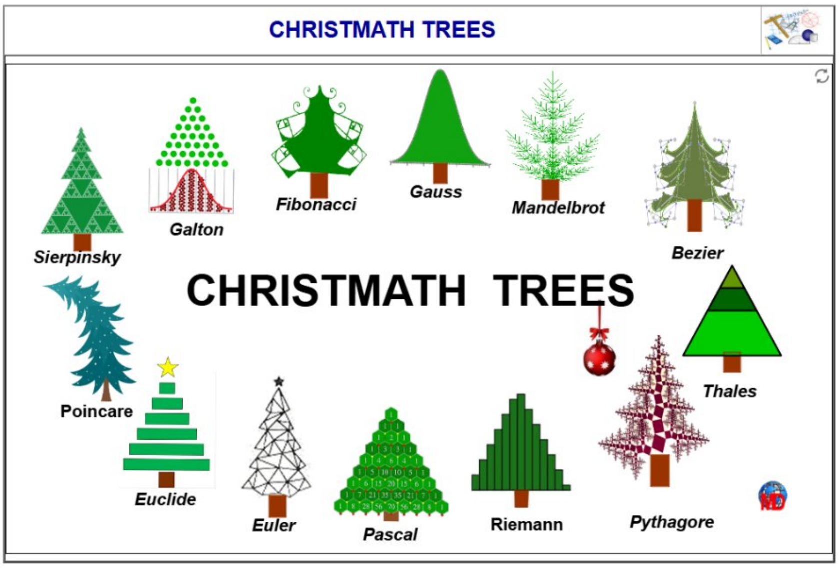
d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de VANDERMONDE $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est non nul.

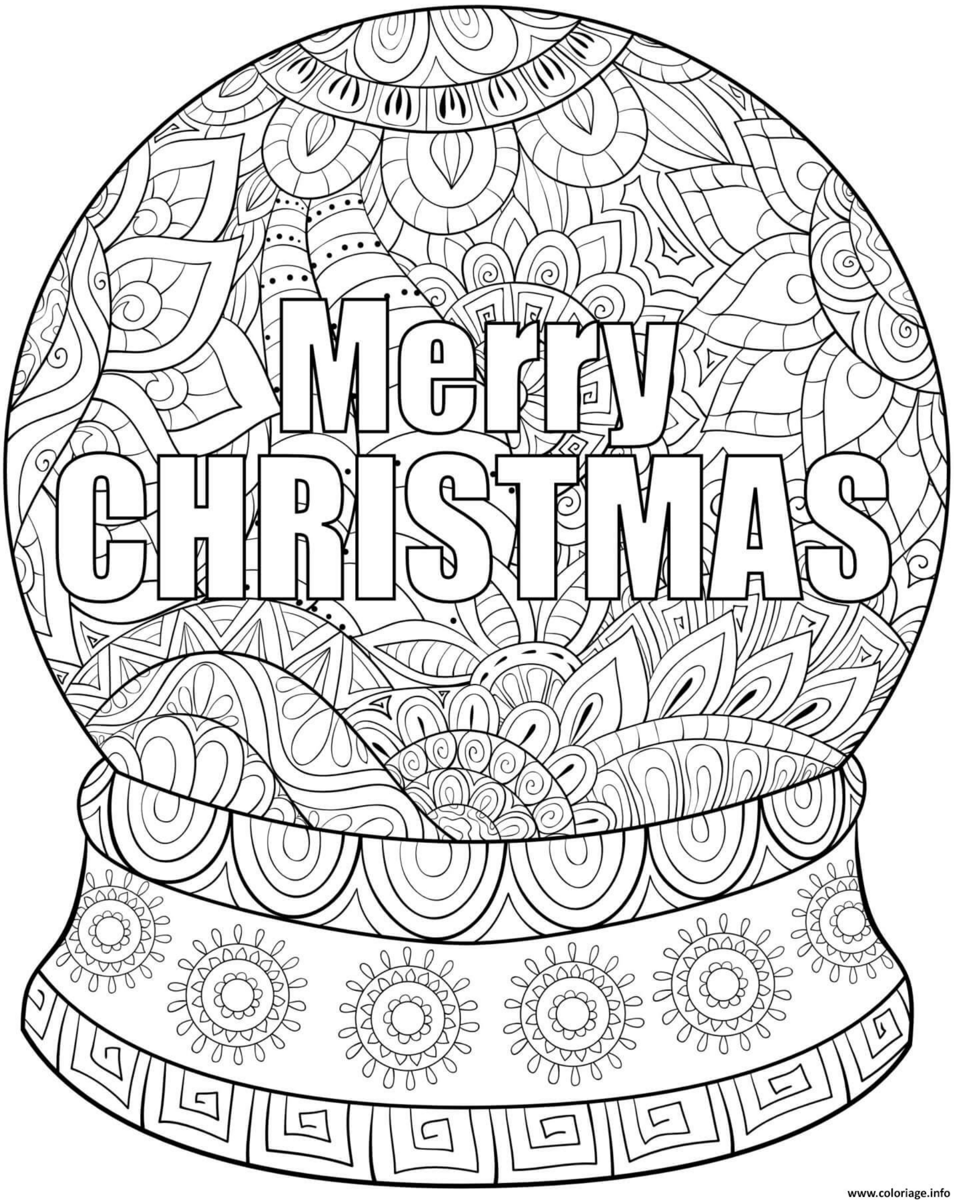
e) (rajout) Question de cours : Donner (sans démonstration) l'expression factorisée du déterminant de VANDERMONDE.

Exercice 5 *(E3A PC 2019 Maths 1 exercice 4)*.

1. **Question de cours 1** : Rappeler sans démonstration l'écriture sous forme de série de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.
2. **Question de cours 2** : Soit $p \in \mathbb{N}$. Prouver que si deux matrices carrées M et N de taille d sont semblables, alors les matrices M^p et N^p sont semblables.

   Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on pose, lorsque cela est possible, $\varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)]$ et $c(z) = \frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)]$ où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
   (a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
   (b) Déterminer une formule analogue pour $c(z)$, $z \in \mathbb{C}$.
4. Si $A = \gamma I_2$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi(A)$.
5. **On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β.**
   (a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.
   (b) Déterminer $\varphi(B)$ puis $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice P.
6. **On suppose que les valeurs propres de A sont égales : $\beta = \alpha$.**
   (a) Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et d'un nombre complexe y tels que $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$.
   (b) Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice Q.
7. Justifier l'existence de $\varphi(A)$ pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
8. Existe-t-il une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait : $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?


CHRISTMATH TREES
Sierpinsky
Galton
Fibonacci
Gauss
Mandelbrot
Bezier
CHRISTMATH TREES
Poincare
Thales
Euclide
Euler
Pascal
Riemann
Pythagore


Merry
CHRISTMAS
www.coloriage.info