DS 5 : vendredi 19 décembre

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° Donner dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (en justifiant) une matrice non diagonalisable mais trigonalisable.
Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable.

2° Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera explicitement tous les coefficients de A^n.

3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer χ_f et en déduire le spectre de f.

(b) Déterminer les deux sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
On notera u un vecteur propre de valeur propre 1 et w un vecteur propre de valeur propre 2.

(c) Déterminer un vecteur v tel que $f(v) = v + u$.

(d) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice T de f dans cette base.

4° On considère, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme $P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[(1+\mathrm{i}X)^n - (1-\mathrm{i}X)^n\right]$. Montrer que P_n est à coefficients réels et déterminer son degré.

5° Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Correction :

1° Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique X^2 qui est scindé (ainsi N est trigonalisable, bon étant donné qu'elle est triangulaire supérieure ...), elle n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $N = PDP^{-1}$ avec $D = 0$, ainsi on aurait $N = 0$, ce qui n'est pas le cas.
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'est pas scindé, ainsi M n'est pas trigonalisable.

2° On trouve (il faut le détailler !) : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Comme $A^n = PD^nP^{-1}$ on trouve que : $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2.4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$.

3° (a) On a : $\chi_f(X) = \ldots = (X-1)^2(X-2)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$

(b) On note $u = (1,1,0)$ et $w = (1,0,1)$ et on trouve $E_1(f) = \mathrm{Vect}(u)$ et $E_2(f) = \mathrm{Vect}(w)$. Comme $\dim(E_1(f)) = 1 \neq 2 = m_1$, f n'est pas diagonalisable.

(c) On résout $f(x,y,z) - (x,y,z) = (1,1,0)$ et on trouve que $v = (0,0,1)$ convient.

(d) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $\det(P) = -1$, la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, comme $f(u) = u$, $f(v) = u + v$ et $f(w) = 2w$, on a donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On applique la formule du binôme :

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{i}^k X^k \right) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{n} (1 - (-1)^k) \binom{n}{k} \mathrm{i}^k X^k.$$

Or $1 - (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$, ainsi il ne reste que les valeurs impaires de k dans la somme, or si k est impair alors i^k est un imaginaire pur, avec le $\frac{1}{\mathrm{i}}$ devant on remarque que tous les coefficients sont réels. Ainsi $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

On a $\deg(P_n) \leq n$, le coefficient devant X^n est $\frac{1-(-1)^n}{2\mathrm{i}} \mathrm{i}^n$, qui est non nul si n est impair, dans ce cas $\deg(P_n) = n$, si n est pair le coefficient devant X^n vaut 0 et le coefficient devant X^{n-1} vaut $\frac{1-(-1)^{n-1}}{2\mathrm{i}} n\mathrm{i}^n$ qui est non nul, ainsi $\deg(P_n) = n - 1$ dans ce cas.

Ainsi $\deg(P_n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

5° Tout d'abord, si $P = c$ alors :$(P')^2 = 4P \iff P = 0$, ainsi le polynôme nul est l'unique solution constante. Si P est un polynôme non constant solution de $(P')^2 = 4P$, alors en notant $n = \deg(P)$, on a $\deg(P') = n - 1$ ainsi $2n - 2 = n$ ie $n = 2$. Ainsi les solutions non constante sont nécessairement de degré 2. Considérons maintenant $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 (ainsi $a \neq 0$). On a : $(P')^2 = 4P \iff (2aX + b)^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \iff \begin{cases} 4a^2 & = 4a \\ 4ab & = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ 0 & = 0 \\ b^2 = 4c \end{cases}$ (car $a \neq= 0$), ainsi P est solution si et seulement si $a = 1$ et $c = \frac{b^2}{4}$. En en déduit donc que les solutions sont les $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$ où $b \in \mathbb{R}$ ainsi que $P = 0$.

Exercice 2 *(*E3A PC 2020 *Ex 1)***.**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3° Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction :

1° On a $\chi_{M_a} = \begin{vmatrix} X - 1 & -a & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X - 1) \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X - 1)(X^2 - 1) = (X - 1)^2(X + 1)$. Ainsi 1 est valeur propre double et -1 est valeur propre simple de M_a.

On a ainsi que M_a est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A)) = 2$. On a $M_a - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, séparons en deux cas :

Si $a = 0$, alors cette matrice est de rang 1 et donc (d'après le théorème du rang) $\dim(E_1(A)) = 2$, on a donc M_0 diagonalisable.

Si $a \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(M_a - I_3) = 2$, ainsi (toujours d'après le théorème du rang), $\dim(E_1(A)) = 1$, on a donc que M_a n'est pas diagonalisable.

En conclusion : M_a est diagonalisable si et seulement si $a = 0$

2° 0 n'est jamais valeur propre de M_a donc M_a est inversible pour tout $a \in \mathbb{R}$.

3° On suppose donc $a \neq 0$, et notons f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a.

Comme -1 est valeur propre simple, on a $\dim(E_{-1}(f_a)) = 1$, de plus On a : $M_a + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $aC_1 - 2C_2 + 2C_3 = 0$ (on peut aussi résoudre un système) on pose $e_1 = (a, -2, 2)$ et on a $f_a(e_1) = -e_1$. On a $\dim(E_1(f_a)) = 1$, et clairement $e_2 = (1, 0, 0)$ est tel que $f_a(e_2) = e_2$.

Il reste donc à trouver $e_3 = (x, y, z)$ tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que $f_a(e_3) = e_2 + e_3$.

On doit donc avoir $\begin{cases} x + ay & = 1 + x \\ z & = y \\ y & = z \end{cases} \iff \begin{cases} ay & = 1 \\ -y + z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases}$.

On pose donc $e_3 = (0, 1/a, 1/a)$, on a bien $f_a(e_3) = e_2 + e_3$, il ne reste plus qu'à montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, le plus rapide est de considérer la matrice $P = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/a \\ 2 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$. En développant par rapport à la deuxième colonne on a $\det(P) = -4/a$ ainsi (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi M_a est semblable à $T = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f_a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *(E3A PC 2024 Ex 3).*

Question de cours

1° Soit x un réel positif. Comparer x et x^2.

******

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geq 1$.

2° On pose pour tout $t \geq 1$, $\varphi(t) = \frac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

2.1 Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

2.2 Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ'.

2.3 Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{1+\alpha t^\alpha}{t^2}$.

2.4 En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\forall t \in [n, n+1],\ |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n|\,.$$

3° On pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.

Prouver que l'on a : $\forall n \geq 1$, $|u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4° **Convergence de l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

4.1 Démonter que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2 À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.

5° Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.

6° En déduire que la série de terme général u_n converge.

7° Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8° Déduire des questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

9° **On suppose que la série** $\displaystyle\sum_{n \geq 1} |a_n|$ **est convergente.**

9.1 Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2 Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On procédera comme à la question **4.2**.

9.3 On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

Correction :

1° Si $x \geq 1$, on a $x^2 \geq x$ et si $x \in [0,1]$, on a $x^2 \leq x$.

2° 2.1 La fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que composée de fonction dérivables, et sa dérivée est la fonction $t \mapsto \alpha t^{\alpha-1}\cos(t^\alpha)$.

2.2 Il en va de même pour φ par produit de fonctions dérivables, et, pour $t \geq 1$, on a : $\varphi'(t) = \dfrac{\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha) - \sin(t^\alpha)}{t^2}$.

2.3 Soit $t \geq 1$, par inégalité triangulaire : $|\varphi'(t)| \leq \dfrac{\alpha t^\alpha |\cos(t^\alpha)| + |\sin(t^\alpha)|}{t^2} \leq \dfrac{\alpha t^\alpha + 1}{t^2}$.

2.4 Soit $n \geq 1$ et $t \in [n, n+1]$, on a $|\varphi'(t)| = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{\alpha}{t^{2-\alpha}}$, comme $2 - \alpha > 0$, on a donc $|\varphi'(t)| \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$. Comme φ est dérivable sur $[n, n+1]$ on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis entre $t \in [n, n+1]$ et n et ainsi on trouve bien : $|\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t - n|$.

3° Soit $n \geq 1$, on a $u_n - a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(n) = \int_n^{n+1} \varphi(t) - \varphi(n)\,\mathrm{d}t$, Ainsi, avec l'inégalité triangulaire on a : $|u_n - a_n| \leq \displaystyle\int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n)|\,\mathrm{d}t$, en utilisant la question précédente on a : $|u_n - a_n| \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t - n|\,\mathrm{d}t$, or si $t \in [n, n+1]$ alors $|t - n| = t - n$), ainsi : $|u_n - a_n| \leq \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)\left[\dfrac{(t-n)^2}{2}\right]_n^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right) \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4° 4.1 La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, on a, pour $t \geq 1$, que $\frac{\cos(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, en on déduit donc que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2 Pour $t \geq 1$, posons $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos(t)$, ainsi u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, et pour $t \geq 1$, on a $u'(t) = \frac{-1}{t^2}$ et $v'(t) = \sin(t)$. De plus (produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée) : $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (convergence du crochet), ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, cette dernière étant convergente, on a donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5° Posons le changement de variable $u = t^\alpha$ (ie $t = u^{1/\alpha}$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}u^{-1+1/\alpha}\mathrm{d}u$) qui est bien une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[1, +\infty[$ dans lui même, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{1/\alpha}} \frac{1}{\alpha u^{1-1/\alpha}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\alpha u}\,\mathrm{d}u$ qui est convergente d'après la question précédente, ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6° Pour $n \geq 1$, par relation de Chasles, on a :$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_1^{n+1} \varphi(t)\mathrm{d}t$, on vient de montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$, ainsi $\sum u_n$ converge.

7° Comme $\alpha \in]0, 1[$, on a $2 - \alpha \in]1, 2[$, ainsi $\sum \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ converge, il en va de même pour $\sum \frac{1}{n^2}$, ainsi l'inégalité de la question **3** donne la convergence de $\sum |u_n - a_n|$, ie la convergence absolue de la série de terme général $u_n - a_n$.

8° Ainsi $\sum u_n - a_n$ converge, comme on a montre que $\sum u_n$ était convergente, on a donc la convergence de la série de terme général $u_n - (u_n - a_n) = a_n$, ie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

9° 9.1 Soit $n \geq 1$, on a $\left|\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}\right| \leq \left|\frac{\sin(n^\alpha)}{n}\right| = |a_n|$ (car $|\sin(n^\alpha)| \in [0,1]$), ce qui montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

9.2 Pour $x \geq 1$, posons $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, ainsi u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, et pour $x \geq 1$, on a $u'(x) = \frac{-1}{x^2}$ et $v'(x) = \cos(2x)$. De plus (produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée) : $u(x)v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (convergence du crochet), ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathsf{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-\sin(2x)}{2x^2}\,\mathsf{d}x$ sont de même nature, or pour $x \geq 1$, on a : $\left|\frac{-\sin(2x)}{2x^2}\right| \leq \frac{1}{2x^2}$, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-\sin(2x)}{2x^2}\,\mathsf{d}x$ converge, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathsf{d}x$ converge.

9.3 Pour $n \geq 1$, on a $\frac{\cos(2n^\alpha)}{n} = \frac{1}{n} - 2\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$, ie $\frac{1}{n} = \frac{\cos(2n^\alpha)}{n} + 2\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$, ainsi $\frac{1}{n}$ est la somme de deux termes généraux de séries convergentes, on en déduit donc que $\sum \frac{1}{n}$ converge, ce qui est absurde, ainsi $\sum a_n$ est convergente mains n'est pas absolument convergente.

Exercice 4 *(sur les matrices compagnon : d'après* CCP MP 2001 *Maths 2).*
Dans cet exercice $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel, et χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée, c'est-à dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(ie la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

1° Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0)\neq 0$.

2° Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_p} = kP$.

3° Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4° On note $C_P^\top$ la transposée de la matrice C_P.

a) Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}(C_P^\top)$.

b) Soit λ élément de $\mathrm{Sp}(C_P^\top)$, déterminer (ie. l'écrire avec un Vect) le sous-espace propre de $C_P^\top$ associé à λ.

c) Montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

d) On suppose que P admet n racines λ_1, λ_2, …, λ_n deux à deux distinctes, montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est non nul.

e) (rajout) Question de cours : Donner (sans démonstration) l'expression factorisée du déterminant de Vandermonde.

Correction :

1° On développe par rapport à la première ligne et on trouve $\det C_P = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$, d'où le résultat.

2° On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve :

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \ddots & & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (X + a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & -1 & X \end{vmatrix} - a_{n-2} \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & -1 & X & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \end{vmatrix} + \dots$$

et on reconnaît $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = P(X)$. Donc $k = 1$.

3° Il faut et il suffit que Q soit unitaire de degré n. En effet un polynôme caractéristique est toujours unitaire de degré n, cette condition est donc nécessaire, et à la question précédente on a montré que la question était suffisante.

4° a) Ce résultat n'est pas spécifique à C_p, il est vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en effet les valeurs propres sont les racines de χ_A qui se calcule par un déterminant, or le déterminant est invariant par transposition, de plus la transposition est linéaire, ainsi on a $X\mathrm{I}_n - A^\top = X\mathrm{I}_n - A^\top$ ce qui montre que $\chi_A = \chi_{A^\top}$ et donc l'égalité des spectres (car le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A).

b) on a $C_P^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ainsi X est vecteur propre de valeur propre λ si et seulement si il vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \dots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_i = \lambda^{i-1}x_1, \, \forall i \in [\![1, n]\!] \\ (-a_0 - a_1\lambda - \dots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 \quad = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Donc, comme x_1 ne peut être nul (un vecteur propre n'est pas nul), on a donc que λ est racine de P et tout vecteur propre est multiple de $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$, ie $E_\lambda\left(C_p^\top\right) = \mathrm{Vect}\left(X_\lambda\right)$.

c) On vient de constater que les espaces propres sont des droites, si la matrice $C_P^\top$ est diagonalisable alors la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n, comme tous les sep sont de dimension 1 il doit donc y en avoir n, ie P possède n racines distinctes (elles sont donc toutes simples).

Réciproquement si P est scindé à racines simples alors le polynôme caractéristique de $C_P^\top$ l'est aussi, ainsi $C_P^\top$ est diagonalisable.

d) Si P est scindé à racines simples, comme on vient de le voir une matrice de passage qui diagonalise $C_P^\top$ est $V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est inversible puisque matrice de passage !

e) C'est : $\displaystyle\prod_{0 \le i < j \le n} \lambda_j - \lambda_i$.

Exercice 5 *(E3A PC 2019 Maths 1 exercice 4).*

1. **Question de cours 1** : Rappeler sans démonstration l'écriture sous forme de série de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.
2. **Question de cours 2** : Soit $p \in \mathbb{N}$. Prouver que si deux matrices carrées M et N de taille d sont semblables, alors les matrices M^p et N^p sont semblables.

   Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on pose, lorsque cela est possible, $\varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)]$ et $c(z) = \frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)]$ où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
   (a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
   (b) Déterminer une formule analogue pour $c(z)$, $z \in \mathbb{C}$.
4. Si $A = \gamma I_2$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi(A)$.
5. **On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β.**
   (a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.
   (b) Déterminer $\varphi(B)$ puis $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice P.
6. **On suppose que les valeurs propres de A sont égales : $\beta = \alpha$.**
   (a) Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et d'un nombre complexe y tels que $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$.
   (b) Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice Q.
7. Justifier l'existence de $\varphi(A)$ pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
8. Existe-t-il une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait : $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Correction :

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
2. Comme M et N sont semblables il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ tel que $M = PNP^{-1}$, ainsi $M^2 = PNP^{-1}PNP^{-1} = PN^2P^{-1}$ et par récurrence directe (la rédiger) on a $M^p = PN^pP^{-1}$, ainsi M^p et N^p sont semblables.
3. (a) On a $s(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{i}^n z^n}{n!}\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-(-1)^n) \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n!}$, or $1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$, on en déduit donc que $s(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{p=0}^{+\infty} 2 \frac{\mathrm{i}^{2p+1} z^{2p+1}}{(2p+1)!}$, et comme $(\mathrm{i})^{2p+1} = \mathrm{i}(-1)^p$, on trouve bien que $s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
   (b) De même on trouve que $c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = \gamma^n I_2$, ainsi pour $m \geq 0$, on trouve $\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1} I_2 \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} s(\gamma) I_2$, ainsi $\varphi(A)$ existe et on a : $\varphi(A) = s(\gamma) I_2$.
5. (a) les valeurs propres étant racines du polynôme caractéristique (unitaire de degré 2), on a $\chi_A(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$, ainsi χ_A est scindé simple, donc A est diagonalisable, il existe donc $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ (ainsi $B = P^{-1}AP$).
   (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \beta^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1} \end{pmatrix} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}$, ainsi $\varphi(B)$ existe et

$\varphi(B) = \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = P \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} P^{-1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} P\varphi(B)P^{-1}$. Ainsi $\varphi(A)$ existe et $\varphi(A) = P \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix} P^{-1}$.

6. (a) La matrice A ne possède qu'une valeur propre, comme $\chi_A(X)$ est scindé (on est dans $\mathbb{C}$), la matrice A est donc trigonalisable, il existe donc une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et une matrice C triangulaire supérieure de la forme $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ telle que $A = QCQ^{-1}$ (ie $C = Q^{-1}AQ$).

   (b) Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi $C = \alpha I_2 + yN$, on a $N^2 = 0$, comme αI_2 et yN commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton et ainsi, pour $n \geq 1$ on a : $C^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} y^k N^k = \alpha^n I_2 + \alpha^{n-1} y \binom{n}{1} N = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$. Cette formule reste vrai pour $n = 0$.

   (c) Pour $m \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C^{2n+1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)\alpha^{2n+1-1}y \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} & y\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} \end{pmatrix} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$. Ainsi $\varphi(C)$ existe et $\varphi(C) = \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$. Par suite, comme en 5°(b) on a l'existence de $\varphi(A)$ et on a $\varphi(A) = Q \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix} Q^{-1}$.

7. Le polynôme caractéristique de A est de degré deux, comme il est scindé il possède soit deux racines distinctes, soit une racine double, on a montré dans les deux cas l'existence de $\varphi(A)$, ainsi $\varphi(A)$ existe toujours.

8. Notons $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, notons tout d'abord que Y n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était elle serait semblable à I_2, et donc serait égal à I_2, ce qui n'est pas le cas.
   Supposons l'existence de X tel que $\varphi(X) = Y$. La matrice X possède soit deux valeurs propres distinctes soit une valeur propre double.
   — Cas 1 : X possède deux valeurs propres distinctes α et β, alors d'après 5° il existe P inversible tel que $\varphi(X) = P \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix} P^{-1}$ ainsi Y est semblable à une matrice diagonale, ce qui n'est pas le cas. Ce cas est donc exclus.
   — Cas 2 : X possède une valeurs propre double α, alors d'après 6° il existe Q inversible tel que $\varphi(X) = Q \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix} Q^{-1}$. Ainsi Y est semblable à $\begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$, elle a donc les mêmes valeurs propres, ainsi $s(\alpha) = 1$. Or on peut remarquer que $c(\alpha)^2 + s(\alpha)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2i\alpha}+2+\mathrm{e}^{-2i\alpha}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{2i\alpha}-2+\mathrm{e}^{-2i\alpha}}{-4} = 1$, ainsi $c(\alpha) = 0$ et on a encore Y semblable à une matrice diagonale, ce qui est encore exclus.
   On viens donc de montrer, par l'absurde, qu'il n'existe pas de matrice X tel que $\varphi(X) = Y$.