DS $5^\star$: vendredi 19 décembre

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(sur les matrices compagnon : d'après* CCP MP 2001 *Maths 2).*
Dans cet exercice $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel, et χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée, c'est-à dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(ie la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

1° Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0)\neq 0$.

2° Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_p} = kP$.

3° Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4° On note $C_P^\top$ la transposée de la matrice C_P.

a) Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}(C_P^\top)$.

b) Soit λ élément de $\mathrm{Sp}(C_P^\top)$, déterminer (ie. l'écrire avec un Vect) le sous-espace propre de $C_P^\top$ associé à λ.

c) Montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de VANDERMONDE $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est non nul.

e) (rajout) Question de cours : Donner (sans démonstration) l'expression factorisée du déterminant de VANDERMONDE.

Correction :

1° On développe par rapport à la première ligne et on trouve $\det C_P = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$, d'où le résultat.

2° On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve :

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \ddots & & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (X + a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & -1 & X \end{vmatrix} - a_{n-2} \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & -1 & X & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \end{vmatrix} + \dots$$

et on reconnaît $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = P(X)$. Donc $k = 1$.

3° Il faut et il suffit que Q soit unitaire de degré n. En effet un polynôme caractéristique est toujours unitaire de degré n, cette condition est donc nécessaire, et à la question précédente on a montré que la question était suffisante.

4° a) Ce résultat n'est pas spécifique à C_p, il est vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en effet les valeurs propres sont les racines de χ_A qui se calcule par un déterminant, or le déterminant est invariant par transposition, de plus la transposition est linéaire, ainsi on a $X\mathrm{I}_n - A^\top = X\mathrm{I}_n - A^\top$ ce qui montre que $\chi_A = \chi_{A^\top}$ et donc l'égalité des spectres (car le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A).

b) on a $C_P^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ainsi X est vecteur propre de valeur propre λ si et seulement si il vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_i = \lambda^{i-1}x_1, \ \forall i \in [\![1, n]\!] \\ (-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 \quad = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Donc, comme x_1 ne peut être nul (un vecteur propre n'est pas nul), on a donc que λ est racine de P et tout vecteur propre est multiple de $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$, ie $E_\lambda\left(C_p^\top\right) = \mathrm{Vect}\,(X_\lambda)$.

c) On vient de constater que les espaces propres sont des droites, si la matrice $C_P^\top$ est diagonalisable alors la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n, comme tous les sep sont de dimension 1 il doit donc y en avoir n, ie P possède n racines distinctes (elles sont donc toutes simples).
Réciproquement si P est scindé à racines simples alors le polynôme caractéristique de $C_P^\top$ l'est aussi, ainsi $C_P^\top$ est diagonalisable.

d) Si P est scindé à racines simples, comme on vient de le voir une matrice de passage qui diagonalise $C_P^\top$ est $V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est inversible puisque matrice de passage !

e) C'est : $\displaystyle\prod_{0 \leq i < j \leq n} \lambda_j - \lambda_i$.

Exercice 2 *(*CENTRALE PC 2015*, sans IV.F ni V)***.**
Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.
Si f est un endomorphisme de E, pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.
Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n.
Pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$.

I Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

I.A – Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

I.B –

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.

I.B.2) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que trois sous-espaces stables.

I.C –

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f. Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f.

I.C.2) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f.

I.C.3) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?

I.D – Dans cette sous-partie, E est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f. On pourra partir d'une base de F et d'une base de E constituée de vecteurs propres de f.

I.D.2) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f, alors f est diagonalisable. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Correction :

I.A – Si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est stable par f, $f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Puisque F est une droite vectorielle engendré par u, u est non nul donc u est bien un vecteur propre de f. Réciproquement si u est un vecteur propre de f associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. $u \neq 0_E$ donc $\mathrm{Vect}(u)$ est une droite vectorielle. De plus, si $v \in \mathrm{Vect}(u)$, il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $v = ku$. Par suite, $f(v) = \lambda k u$ donc $f(v) \in \mathrm{Vect}(u)$. $\mathrm{Vect}(u)$ est donc stable par f.

I.B –

I.B.1) Les sous-espaces $\{0_E\}$ et E sont clairement stables par F, il y a donc au moins deux sous-espaces stables par F.
Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Si F est un sous-espace vectoriel stable autre que $\{0_E\}$ et E alors $\dim(F) = 1$. D'après I.A, f admet alors un vecteur propre associé à une valeur propre réelle.
Le polynôme caractéristique de f est $X^2 + 1$. Celui-ci n'a pas de racines réelles, f n'admet donc pas de valeurs propres réelles puisqu'elles sont racines du polynôme caractéristique.
f n'a donc que $\{0_E\}$ et E comme sous-espaces propres stables.

I.B.2) Ici $n \geq 2$. Si f est non nul, $\mathrm{Ker}(f) \neq E$ et si f est non injective $f \neq \{0_E\}$. De plus, $f(\mathrm{Ker}(f)) = \{0_E\}$ donc $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par f. Ainsi f admet au moins trois sous-espaces stables, $\{0_E\}$, E et $\mathrm{Ker}(f)$.
Remarque : $n \geq 2$ est nécessaire car sinon on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ou $\mathrm{Ker}(f) = E$.
Supposons de plus n impair. On a $f(\mathrm{Im}(f)) = \{f(f(u))\,;\, u \in E\} \subset \mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ est donc stable

par f. Comme f est non injective, f étant un endomorphisme sur un espace de dimension finie f est non surjective donc $\mathrm{Im}(f) \neq E$. f est non nul donc $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$. D'après le théorème du rang $n = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Par suite, si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ on a $n = 2rg(f)$ et donc n est pair. Ce n'est pas le cas donc $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est un quatrième sous-espace propre qui s'ajoute au trois autres.
Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
f est non nul, non injective car $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1)$ donc f admet au moins trois sous-espaces stables. Supposons que F soit un autre sous-espace stable par f. On a alors $\dim(F) = 1$ et de I.A. F est engendré par un vecteur propre de f. Le polynôme caractéristique de f est X^2. f admet donc comme seule valeur propre 0 donc $F = \mathrm{Ker}(f)$. Il n'y a donc que trois sous-espaces stables par f.

I.C –

I.C.1) Soient $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ une famille de k vecteurs propres de f associés respectivement à des valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_k)$.
Soit $u \in F$. Il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$. On a alors $f(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i u_i$ donc $f(u) \in F$. Ainsi F est stable par f.
L'endomorphisme induit par f sur un sous-espace propre F associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ est λId_F.

I.C.2) Soit F un sous-espace stable de f de dimension au moins 2. Soit (u, v) une famille libre de F. On vérifie alors que pour tout $(a, b) \in (K^*)^2$ avec $a \neq b$, la famille $(u + av, u + bv)$ est libre.
La famille $(\mathrm{Vect}(u + av))_{a \in \mathbb{K}^*}$ est donc une famille de droites vectorielles deux à deux distinctes, il y en a donc une infinité. De plus, u est v sont des vecteurs propres donc, d'après I.C.1) $\mathrm{Vect}(u + av)$ est stable par f pour tout $a \in \mathbb{K}^*$. Ainsi, f admet une infinité de droites vectorielles stables par f.

I.C.3) Si tout sous-espace vectoriel de f est stable par f toute droite vectorielle l'est aussi et donc tout vecteur de E est vecteur propre de f. Montrons que f admet une seule valeur propre.
Soit, pour tout $u \in E$, $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$. Soit $(u, v) \in E^2$.
Supposons (u, v) libre. On a $f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_u u + \lambda_v v$ donc $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0_E$. La liberté de (u, v) impose $\lambda_{u+v} = \lambda_u = \lambda_v$.
Supposons (u, v) liée. Si $u = 0_E$, on a $f(u) = \lambda_v 0_E$ et on peut convenir que $\lambda_u = \lambda_v$. On peut conclure la même chose si $v = 0_E$.
Si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $v = \alpha u$. Par suite, $f(v) = \alpha f(u) = \alpha \lambda_u u$ et $f(v) = \lambda_v v = \alpha \lambda_v u$. Comme $u \neq 0_E$, $\alpha \lambda_u = \alpha \lambda_v$ et comme $\alpha \neq 0$, $\lambda_u = \lambda_v$.
Ainsi, f n'admet qu'une seule valeur propre et comme tout vecteur de E est vecteur propre f est une homothétie vectorielle de rapport cette valeur propre.

I.D –

I.D.1) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F (où $p = \dim(F)$, si $F = \{0\}$ alors E est un supplémentaire stable par f, de même avec $\{0\}$ si $F = E$, on suppose donc $p \in [\![1, n-1]\!]$). Comme f est diagonalisable il existe une base $(u_1, \cdots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.
D'après le théorème de la base incomplète (dans sa version forte), on peut compléter la famille libre $(e_1, \ldots, e_p)$ (car c'est une base de F) en une base de E avec des vecteurs de $(u_1, \cdots, u_n)$, quitte à changer l'ordre on peut supposer que c'est $(u_1, \ldots, u_{n-p})$. Ainsi $G = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_{n-p})$ est un supplémentaire de F dans E (car la concaténation des deux bases donne une base de E) et comme il est engendré par une famille de vecteurs propres, G est stable par f.

I.D.2) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. D'après le théorème de De d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de f admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ donc f admet au moins un vecteur propre. Soit F la somme directe des sous-espaces propres de f. $F \neq \{0_E\}$ d'après ce qui précède.
Supposons $F \neq E$. F admet un supplémentaire G stable par G et $G \neq \{0_E\}$ car $F \neq E$. L'endomorphisme $f_{|G}$ a aussi un polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{C}$ et donc un vecteur propre u. u est alors immédiatement vecteur propre de f et est donc dans F. Or, F et G sont supplémentaires donc $u = 0_E$ ce qui est contradictoire avec u vecteur propre. Ainsi $F = E$ et donc f est diagonalisable.
Alternative : On peut construire à la main une base de vecteurs propres (de manière récurrente) : comme on est dans $\mathbb{C}$ et comme $n \geq 1$, on a $\mathrm{Sp}(f) \neq \emptyset$, prenons $\lambda_1 \in \mathrm{Sp}(f)$, ainsi il existe un vecteur propre e_1 de valeur propre λ_1, comme $e_1 \neq 0$ alors $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$ est un sous-espace de dimension 1 de E, il possède donc un supplémentaire G_1 (de dimension $n-1$) stable par f, notons f_1 l'endomorphisme induit par f sur G_1. On répète l'opération (si $n - 1 \geq 1$, sinon on a terminé) : il existe un vecteur propre e_2 de valeur propre λ_2 de f_1 dans G_1, c'est donc aussi un vecteur propre de f de valeur propre λ_2, comme F_1 et G_1 sont en somme directe, la famille (e_1, e_2) est libre. On pose alors $F_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ qui est un sev de E de dimension 2, donc il

possède un supplémentaire G_2, de dimension $n-2$, stable par f et on note f_2 l'endomorphisme induit par f sur G_2, on réitère n fois, ie jusqu'à avoir $F_n = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ et donc $G_n = \{0\}$, la famille $(e_1,\dots,e_n)$ ainsi construite est une base de diagonalisation de de f, ainsi f est diagonalisable.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on ne peut pas conclure que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Prenons par exemple l'endomorphisme de la question I.B.1) pour lequel les seuls sous-espaces stables sont $\{0_E\}$ et E et donc tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable et cet endomorphisme n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

II Deuxième partie

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ et, pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F\cap E_i)$.

II.A.1) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \oplus_{i=1}^{p}(F\cap E_i)$ est stable par f.

II.A.2) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans $E_1\times\cdots\times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

II.A.3) Si on pose $H_x = \{i\in[\![1,p]\!] \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = [\![1,r]\!]$ avec $1\leqslant r\leqslant p$. Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i\setminus\{0\}$ pour tout i de $[\![1,r]\!]$.
On pose $V_x = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_r)$.
Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1,\dots,x_r)$ est une base de V_x.

II.A.4) Montrer que pour tout j de $[\![1,r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$.

II.A.5) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de V_x.

II.A.6) En déduire que pour tout i de $[\![1,r]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.

II.B.1) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.

II.B.2) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

II.B.3) Si $n\geqslant 3$ et $k\in[\![2,n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

Correction :

II.A) –

II.A.1) Soit $u\in F$. Il existe $(u_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{p} F\cap E_i$ tel que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i$.

Par suite, $f(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i$. Comme, pour tout $i\in\{1,\cdots,p\}$, F et E_i sont des sous-espaces vectoriels $F\cap E_i$ l'est aussi et donc $\lambda_i u_i \in F\cap E_i$.

Ainsi $f(u) \in \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F\cap E_i$. $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F\cap E_i$ est donc stable par f.

II.A.2) Les valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}}$ dont deux à deux distinctes donc les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}}$ sont en somme directe. De plus, f est diagonalisable donc $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Par conséquent, il existe $(x_i)_{1\leq i\leq p} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{p} E_i$ unique tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$.

II.A.3) $(x_1,\cdots,x_r)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc c'est une famille libre. De plus, $(x_1,\cdots,x_r)$ est immédiatement une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_r)$ donc $(x_1,\cdots,x_r)$ est une base de V_x.

II.A.4) On a, pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$, $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i \in V_x$. La matrice de $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \ldots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$.

II.A.5) Le déterminant de la matrice de $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est un déterminant de Vendermonde qui vaut : $\prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$. Comme $(\lambda_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est une famille de scalaires deux à deux distincts, ce déterminant est non nul. Par suite, la famille $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ est libre et étant de cardinal à égal à r, dimension de V_x, c'est une base de V_x.

II.A.6) Soit $i \in [\![1,p]\!]$. D'après II.A.5) il existe $(\alpha_{i,j})_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ tel que $x_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{i,j} f^{j-1}(x)$. Comme F est stable par f, F est de façon immédiate stable par f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $x \in F$, on a donc $f^{j-1}(x) \in F$ pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$. Par suite, $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{i,j} f^{j-1}(x) \in F$ et donc $x_i \in F$, ceci pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$..

On a donc $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i$, ceci étant aussi immédiatement vrai pour 0_E, on déduit que $F \subset \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i$ puis par double inclusion immédiate on a $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i$.

II.B) –

II.B.1) Soit $i \in \{1, \cdots, p\}$. Comme $p = n$ et que $(\lambda_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ sont deux à deux distincts, λ_i est une valeur propre d'ordre de multiplicité un. Par suite, $\dim(E_i) = 1$.

II.B.2) D'après II.B.1), pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, E_i est engendré par un vecteur propre et donc d'après I.A E_i est stable par f. De plus, si D est une droite vectorielle stable par f, elle est engendrée par un vecteur propre d'après encore I.A et est donc l'un des sous-espaces propres E_i puisque pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\dim(E_i) = \dim(D) = 1$. Par conséquent, $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont les seules droite vectorielles stables par f. Il y en a donc n.

II.B.3) Montrons que F est stable par f et $\dim(F) = k$ si et seulement si il existe $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $\mathrm{Card}(H) = k$ tel que $F = \bigoplus_{i\in H} E_i$.

Soit $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $card(H) = k$. Soit, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, un vecteur propre $u_i \in E$ tel que $E_i = \mathrm{Vect}(u_i)$. On a donc $\bigoplus_{i\in H} E_i = \mathrm{Vect}((u_i)_{i\in H})$. D'après I.C-1), $\mathrm{Vect}((u_i)_{i\in H})$ est stable par f donc $\bigoplus_{i\in H} E_i$ l'est aussi.

Soit F un sous-espace de dimension k et stable par f. D'après II.A.6), $F = F \subset \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i$.. Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$. Comme $\dim(E_i) = 1$, on a ou bien $F \cap E_i = E_i$ ou bien $F \cap E_i = \{0_E\}$. Soit $H = \{i \in [\![1,n]\!]\,;\, F \cap E_i = E_i\}$. On a donc $F = \bigoplus_{i\in H} E_i$. De plus, $\dim(F) = \dim(\bigoplus_{i\in H} E_i) = \sum_{i\in H} \dim(E_i) = card(H)$, donc $card(H) = k$. F est donc stable par f et $\dim(F) = k$ si et seulement si il existe $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $card(H) = k$ tel que $F = \bigoplus_{i\in H} E_i$.

On déduit que le nombre de sous-espaces stables par f et de dimension k est le nombre de k-combinaisons de $\{1, \ldots, n\}$ c'est-à-dire, $\binom{n}{k}$.

II.B.4) Si $n = 2$, d'après II.B.2), Les sous-espaces stables sont $\{0_E\}$, E, E_1 et E_2.

Si $n \geq 3$, d'après II.B.2) et II.B.3), il y a $1 + \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} + 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, cette formule étant d'ailleurs valable pour $n = 2$ et $n = 1$.

Les sous-espaces stables de f sont $\{0_E\}$, E_i, $i \in [\![1,n]\!]$ et $\bigoplus_{i\in H} E_i$, avec $H \subset \{1, \cdots, n\}$ $2 \leq \mathrm{Card}(H) \leq n - 1$.

III Troisième partie

III.A – On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$.

III.A.1) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

III.A.2) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tels que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

b) Montrer que la famille $(D^i(R))_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de F.

c) En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.

III.A.3) Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

III.B – On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

III.B.1) Déterminer l'ensemble des vecteurs u de E tels que la famille $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit une base de E.

III.B.2) Dans le cas où $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E, quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$?

III.B.3) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1}.

III.B.4) Donner tous les sous-espaces de E stables par f. Combien y en a-t-il ? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux $\ker(f^i)$ pour i dans $[\![0, n]\!]$.

Correction :

III.A) –

III.A.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si $deg(P) \leq 0$, $P' = 0$ et donc $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. Si $deg(P) \geq 1$, $de(P') = deg(P) - 1$ donc $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. $\mathbb{K}_n[X]$ est donc stable par D.

On a $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

III.A.2)

a) Soit $L = \{p \in \mathbb{N}\,;\, \exists P \in F \text{ avec } deg(P) = p\}$. Cet ensemble est non vide vu que F est de dimension non nulle, il contient un polynôme non nul dont le degré est dans L. Supposons L non majorée. En ce cas, il existe une suite $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de polynômes tous non nuls de F et de degré strictement croissant. Cette famille est donc de degré echelonné donc est libre. Ce qui impose F de dimension infinie. Or, $\dim(F)$ est finie, donc L est majorée. $L \subset \mathbb{N}$ donc L admet un plus grand élément. Soit n celui-ci. Par suite, il existe $R \in F$ tel que $deg(R) = n$. De plus, pour tout $P \in F$, $deg(P) \leq n$ donc $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
Alternative : F est de dimension finie non nulle, notons la k, ainsi il existe une base $(P_1, \ldots, P_k)$ de F, notons n le plus grand élément de l'ensemble (fini) $\{\deg(P_1), \ldots, \deg(P_k)\}$ et ℓ un entier entre 1 et k tel que $\deg(P_\ell) = n$ Notons $R = P_\ell$. Par définition du maximum, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ on a $\deg(P_i) \leq n$, ainsi si $P \in F$, comme P est combinaison linéaire de $P_1, \ldots, P_k$ on a $\deg(P) \leq n$, ce qui montre $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ et on a bien montré l'existence d'un $R \in F$ tel que $\deg(R) = n$.

b) Pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, on montre par récurrence que $deg(D^i(R)) = n - i$. Or, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, $0 \leq n - i \leq n$. Par suite, $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$ est une famille de polynômes tous non nuls et de degré échelonné donc $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$ est libre.

c) La famille $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$ est libre d'après la question précédente. Elle possède $n+1$ éléments qui sont tous dans $\mathbb{K}_n[X]$ et $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(D^i(R))_{0\leq i\leq n})$. Par suite, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$. De l'inclusion de III.A.1.a), on a $F = \mathbb{K}_n[X]$.

III.A.3) D'après III.A.1) et III.A.2) F est un sous-espace de dimension finie stable par D si et seulement si $F = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F = \mathbb{K}_n[X]$. Soit à présent F un sous espace stable par D de dimension infinie. Montrons que $D = \mathbb{K}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si P est nul, $P \in D$. Supposons P non nul. Comme F est de dimension infinie il existe $Q \in F$ avec $deg(Q) > deq(P)$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $F \subset K_p[X]$, où $p = deg(P)$ et F serait de dimension finie. Soit $q = deg(Q)$. Comme F et $\mathbb{K}_q[X]$ sont stables, $F \cap \mathbb{K}_q[X]$ l'est aussi. De plus, $\mathbb{K}_q[X] \cap F$ est de dimension finie donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{K}_q[X] \cap F = \mathbb{K}_r[X]$. On a donc $\mathbb{K}_r[X] \subset \mathbb{K}_q[X]$ donc $r \leq q$. De plus, $Q \in \mathbb{K}_q[X] \cap F$ donc $Q \in \mathbb{K}_r[X]$ donc $q \leq r$. Ainsi $r = q$ donc $\mathbb{K}_q[X] \cap F = \mathbb{K}_q[X]$. Or, $deq(P) < deq(Q)$ donc $P \in \mathbb{K}_q[X]$ donc $P \in F$. Ainsi $\mathbb{K}[X] \subset F$ et par double inclusion immédiate, $F = \mathbb{K}[X]$.
Les sous espaces stables de $\mathbb{K}[X]$ par D sont donc les sous-espaces $0_{\mathbb{K}[X]}$, $\mathbb{K}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K}[X]$.

III.B. –

III.B.1) Soit $M = \{u \in E\,;\, \mathcal{B}_{f,u}\text{ est un base de } E\}$. Montrons que $M = E\backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1})$.
Si $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E, $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ donc $u \in E\backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1})$. L'inclusion $M \subset E\backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1})$ s'en déduit. Soit $u \in E\backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1})$. Montrons que $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre.
Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f^{n-i}(u) = 0_E$. Supposons $a_1, \cdots, a_n$ non tous nuls. Soit alors $i_0 = max\{i \in [\![1, n]\!]\,;\, a_i \neq 0\}$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_0} a_i f^{n-i}(u) = 0_E$. Comme $f^n = 0$, $f^k = 0$ pour tout $k \geq n$, en composant par f^{i_0-1} à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient donc $a_{i_0} f^{n-1}(u) = 0_E$. Comme $f^{n-1}(u) \neq 0_E$, $a_{i_0} = 0$ ce qui contredit $a_{i_0} \neq 0$. Par suite, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_i = 0$ et donc $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre. Il s'agit d'une famille de n vecteurs et comme $\dim(E) = n$, $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E. Ainsi $E\backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1}) \subset M$ et par double inclusion $M = E\backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1})$.

III.B.2) La matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

III.B.3) Soit $u \in E$ tel que $\mathcal{B}_{f,u}$ soit une base de E.
Soit $\mathcal{B}'_{f,u} = ((i-1)!f^{n-i}(u))_{1\leq i\leq n}$. $\mathcal{B}'_{f,u}$ est alors clairement aussi une base de E. De plus, pour tout $i \in \{2, \cdots, n\}$, $f((i-1)!f^{n-i}(u)) = (i-1)\left(((i-1)-1)!f^{n-(i-1)}(u)\right)$ et pour $i = 1$, $f((i-1)!f^{n-i}(u)) = 0_E$. Par conséquent, la matrice de f dans $\mathcal{B}'_{f,u}$ est bien A_{n-1}.

III.B.4) Tout d'abord, pour $i \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathrm{Ker}(f^i)$ on a $f^i(f(x)) = f^{i+1}(x) = f(f^i(x)) = f(0) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f^i)$ est stable par f (on a aussi montré $\mathrm{Ker}(f^i) \subset \mathrm{Ker}(f^{i+1})$). Or les inclusions sont strictes, en effet si pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ on a $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})$, alors $\mathrm{Ker}(f^{i+1}) = \mathrm{Ker}(f^{i+2})$ (car si $x \in \mathrm{Ker}(f^{i+2})$ alors $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{i+1})$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^i)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{i+1}$ ainsi $\mathrm{Ker}(f^{i+2} \subset \mathrm{Ker}(f^{i+1}$ et l'autre inclusion a déjà été démontrée) donc par récurrence direct $\mathrm{Ker}(f^{n-1}) = \mathrm{Ker}(f^n)$, ce qui est absurde puisque $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
En conclusion on a trouvé $n+1$ sous-espaces stables par f : les $\mathrm{Ker}(f^i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. Reste à Montrer que ce sont les seules.

Soit $u \in E$ tel que $\mathcal{B}_{f,u}$ soit une base de E. D'après III.B.3), f et $D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}}$ ont la même matrice représentative dans respectivement les bases $(X^{i-1})_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{B}'_{f,u} = (u_{i-1})_{1\leq i\leq n}$, où on a noté, $u_{i-1} = (i-1)!f^{n-i}(u)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Dit autrement f et $D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}}$ sont semblable. On introduit l'application linéaire g de E dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ telle que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $g(X^{i-1}) = u_{i-1}$, alors comme g transforme une base en une base c'est un isomorphisme et on a ainsi : $f = g \circ D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}} o g^{-1}$. Ainsi $g^{-1} \circ f = D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}} o g^{-1}$.
Soit F un sous-espace de E, montrons que F est stable par F si et seulement si $g^{-1}(F)$ est stable par $D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}}$.

- Si F est stable par f alors $g^{-1}(f(F)) \subset g^{-1}(F)$. Et donc $D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}}(g^{-1}(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $g^{-1}(F)$ est stable par $D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}}$.
- Si $g^{-1}(F)$ soit stable par $D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}}$, on a $D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}}(g^{-1}(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $g^{-1}(f(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $gog^{-1}((f(F)) \subset g(g^{-1}(F))$ donc $f(F) \subset F$ donc F est stable par f.

Comme g est un isomorphisme on a donc autant de sous-espaces stable par f que de sous-espaces stables par $D_{|_{\mathbb{K}_{n-1}[X]}}$. Comme on a montré en III.A.3 qu'il y en avait $n+1$ ($\{0\}$ et les $\mathbb{K}_i[X]$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$). Il n'y a donc pas de sous-espaces stable par f en plus des $n+1$ trouvés.

En conclusion les sous-espaces stables par f sont les $\mathrm{Ker}(f^i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$, et il y en a $n+1$.

IV Quatrième partie

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = MX$ pour tout X de E.

IV.A – Si on pose $X_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}$ où $\delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$ et $\mathcal{B}_n = (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de E, quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_n$?

IV.B – Montrer que si n est impair, alors f admet au moins une valeur propre réelle.

IV.C – Dans cette question, $\lambda = \alpha + i\beta$, avec (α, β) dans $\mathbb{R}^2$, est une valeur propre non réelle de M et Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul est tel que $MZ = \lambda Z$.
Si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose $\overline{M} = (m'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $m'_{i,j} = \overline{m_{i,j}}$ (conjugué du nombre complexe $m_{i,j}$) pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ et si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on pose $\overline{Z} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ avec $z'_i = \overline{z_i}$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$.
On pose $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ et $Y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$.

IV.C.1) Vérifier que X et Y sont dans E et montrer que la famille (X, Y) est libre dans E.

IV.C.2) Montrer que le plan vectoriel F engendré par X et Y est stable par f et donner la matrice de f_F dans la base (X, Y).

IV.D – Que penser de l'affirmation : « tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable » ?

IV.E – Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant ni droite ni plan stable ?

Correction :

IV.A – MX_i étant la colonne i de M, par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, la matrice de f dans $\mathcal{B}_n$ est M.

IV.B – Le polynôme caractéristique χ_f de f étant unitaire de degré n, il tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$; comme il change de signe et est une fonction continue réelle, il admet au moins une racine réelle donc f a au moins une valeur propre.

IV.C –

IV.C.1) X et Y sont bien des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ puisque pour tout i, $x_i = \Re e(z_i)$ et $y_i = \Im m(z_i)$.
Soient (a, b) un couple de réels tels que $aX + bY = 0$ ce qui équivaut à $(a - ib)Z + (a + ib)\overline{Z} = 0$. comme $MZ = \lambda Z$, $M\overline{Z} = \overline{\lambda Z}$. Z et $\overline{Z}$ sont des vecteurs propres de M associés à deux valeurs propres distinctes (car $\lambda \notin \mathbb{R}$), ils forment une famille libre donc $a - ib = a + ib = 0$ ce qui équivaut à $a = b = 0$ ce qui prouve que (X, Y) est libre.

IV.C.2) On a immédiatement :

$$\begin{cases} 2MX = MZ + M\overline{Z} = 2\Re e\left((\alpha + i\beta)(X + iY)\right) = 2(\alpha X - \beta Y) \\ 2MY = \frac{1}{i}\left(MZ - M\overline{Z}\right) = 2\Im m\left((\alpha + i\beta)(X + iY)\right) = 2(\beta X + \alpha Y) \end{cases}$$

ce qui prouve que le plan vectoriel F est stable par f et la matrice de f_F dans la base (X, Y) est $M_F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

IV.D – Soit E un espace vectoriel de **dimension** n **non nulle** et un endomorphisme f de E admet de matrice M dans une base $\mathcal{B}$ donnée de E. Si f a une valeur propre réelle λ, tout vecteur propre de f associé à λ engendre une droite stable par f.
Si f n'a pas de valeur propre réelle, sa matrice M admet au moins une valeur propre complexe λ ($n \neq 0$). En reprenant les notations de la question C, les vecteurs x et y de E de matrices X et Y dans la base $\mathcal{B}$ engendrent un plan stable par E.Ainsi :
tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle admet une droite ou un plan stable.

IV.E – Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = PX$. Si P est non nul, $\deg(f(P)) = \deg(P) + 1$ donc $f(P)$ ne peut pas être colinéaire à P ; de plus $P, f(P), f^2(P)$ est une famille libre (car étagée en degré) donc P ne peut pas appartenir à un plan stable.
L'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = PX$ n'admet ni droite ni plan stable.