DNS 6* : pour le vendredi 7 janvier

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

X-E.N.S-E.S.P.C.I. 2017

Dans le problème, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et n.
$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.
$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$) désigne l'espace des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$). La matrice transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ est notée ${}^tM$.
$\mathbb{C}^n$ est identifié à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$. Dans tout le problème, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice ${}^txy \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par un vecteur $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est noté $\mathbb{C}v$.
Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont des réels positifs (resp. strictement positifs). Cette propriété est notée $M \geq 0$ (resp. $M > 0$).
Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on notera $A \geq B$ (resp. $A > B$) la propriété $A - B \geq 0$ (resp. $A - B > 0$).
Ainsi, pour x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i \leq y_i.$$

Lorsque $m = n$, on utilisera la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) pour $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (resp $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$).
La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On note $I_n = \mathrm{diag}(1, \dots, 1)$ la matrice identité d'ordre n.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_1 = 1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \qquad (1)$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera en général identifiée à l'endomorphisme φ_M de $\mathbb{C}^n$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$: pour $x \in \mathbb{C}^n$, $\varphi_M(x) = Mx$. On appelle spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on note $\mathrm{Sp}(M)$, l'ensemble des valeurs propres de M. Le rayon spectral de M, noté $\rho(M)$, est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de M :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}.$$

Première partie

1° (a) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence

$$\|M\| \leq C \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

(b) Montrer que l'application $M \mapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2° Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\quad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

3° Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right).$$

4° On dit qu'une suite $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\quad \lim_{k\to+\infty}(a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite $(A^{(k)})$ converge vers B si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^{(k)} - B\| = 0$.

5° On considère dans cette question une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\quad |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \mathrm{diag}(1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Calculer $P_b^{-1}AP_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?

(b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\|P_b^{-1}AP_b\| < 1.$$

(c) En déduire que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Correction :

1° (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C > 0$.

Sens direct : On suppose $\|M\| \leq C$, ie. (d'après (1)) on suppose $\sup\limits_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$.

Soit $x \in \mathbb{C}^n$, si $x = 0$ on a bien $\|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$, si $x \neq 0$, comme $\dfrac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq \|M\|$ on a bien $\|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$.

Sens réciproque : On suppose pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ que : $\|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$: $\dfrac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \leq C$, en prenant le sup sur x on a donc $\|M\| \leq C$

Ce qui montre bien l'équivalence demandée.

(b) Positivité : On prend le sup d'un ensemble non vide de réels positif, on a donc bien la positivité.

Séparation : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M\| = 0$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, que $\dfrac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} = 0$, ie. que $\|Mx\|_1 = 0$ et donc (la norme 1 est une norme) que $Mx = 0$. On en conclue donc que $M = 0$ (par exemple avec l'identification de l'énoncé : on a pour tout x que $\varphi_M(x) = 0$, ainsi φ_M est l'endomorphisme nul).

Homogénéité : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme $\|\cdot\|_1$ est une norme on a, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, que $\|\lambda Mx\| \leq |\lambda|\|Mx\|_1$ et donc que $\|M\| \leq |\lambda|\|M\|$. On a aussi, pour $\lambda \neq 0$ (pas de problème si $\lambda = 0$) $\|\frac{1}{\lambda}\lambda M\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda M\|$ et donc $|\lambda|\|M\| \leq \|\lambda M\|$. Ce qui termine de montrer $\|M\| = |\lambda|\|M\|$

Inégalité triangulaire : Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Pour $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\|_1 = 1$. On a $\|(M+N)x\|_1 \leq \|Mx\|_1 + \|Nx\|_1 \leq \|M\| + \|N\|$ et donc $\|M+N\| \leq \|M\| + \|N\|$.

Ce qui montre bien que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2° Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Comme $\|B\| \leq \|B\|$ on a d'après (a) que $\|Bx\|_1 \leq \|B\|\|x\|_1$. On a aussi, toujours en appliquant (a) (le sens direct avec $M = A$, $C = \|A\|$ et le vecteur Bx) que : $\|ABx\|_1 \leq \|A\|\|Bx\|_1$. On a donc $\|ABx\|_1 \leq \|A\|\|B\|\|x\|_1$. Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, la réciproque de (a) (pour $M = AB$ et $C = \|A\|\|B\|$) donne $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

3° Posons $S_A = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)$ et notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit j_0 l'indice de colonne qui réalise le maximum $S_A = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|$. Comme $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ on a déjà $S_A \leq \|A\|$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_j e_j \in \mathbb{C}^n$. On a : $\|Ax\|_1 = \left\|\sum_{j=1}^n x_j A e_j\right\| \overset{\text{IT}}{\leq} \sum_{j=1}^n |x_j|\,\|Ae_j\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \underbrace{\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|}_{\leq S_A} \leq S_A\|x\|_1$. Ainsi, d'après 1°(a) : $\|A\| \leq S_A$.
On a bien montré que $S_A = \|A\|$.

4° Sens direct : On suppose que $(A^{(k)})$ converge vers B. On a $0 \leq \|A^{(k)} - B\| = S_{A^{(k)}-B} \leq \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \left|a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}\right|$ (le maximum d'une famille finie de nombres positifs est plus petit que la somme de ces nombres), chacun des termes de cette somme tend vers 0, ainsi $\|A^{(k)} - B\|$ tend aussi vers 0.
Réciproque : On suppose que $\|A^{(k)} - B\|$ tend vers 0. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $0 \leq \left|a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}\right| \leq \sum_{\ell=1}^n \left|a_{\ell,j}^{(k)} - b_{\ell,j}\right| \leq S_{A^{(k)}-B} = \|A^{(k)} - B\|$, ainsi $\lim_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = b_{i,j}$, ce qui montre que $(A^{(k)})$ converge vers B.

5° (a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on a $(AP_b)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}(P_b)_{k,j} = b^{j-1}a_{i,j}$. Ainsi $(P_b^{-1}AP_b)_{i,j} = b^{j-i}a_{i,j}$. Il y a donc un b en facteur devant tous les coefficients non diagonaux, ainsi $\lim_{b\to 0} P_b^{-1}AP_b = \mathrm{Diag}(a_{1,1},\dots,a_{n,n})$.

(b) Comme $\|\cdot\|$ est continue on a $\lim_{b\to 0}\|P_b^{-1}AP_b\| = \|\mathrm{Diag}(a_{1,1},\dots,a_{n,n})\| \overset{3^\circ}{=} \max(|a_{i,i}|\,,\, i \in [\![1,n]\!])$. Notons ℓ cette limite, par hypothèse on a $\ell < 1$. Il existe donc un voisinage de 0 tel que si b est dans ce voisinage alors $\|P_b^{-1}AP_b\| < 1$ (définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$).

(c) On utilise le b de la question précédente. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a (en utilisant $(P_b^{-1}AP_b)^k = P_b^{-1}A^kP_b$) que : $\|A^k\| = \|P_b(P_b^{-1}A^kP_b)P_b^{-1}\| \overset{2^\circ}{\leq} \|P_b\|\|P_b^{-1}AP_b\|^k\|P_b{}^{-1}\|$. Comme $(\|P_b^{-1}AP_b\|^k)$ tend vers 0, il en va de même d'après cette inégalité pour (A^k).

Deuxième partie

6° Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&-1\\2&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}.$$

7° Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mu \in \mathbb{C}$.
i) $\rho(\mu A) = |\mu|\rho(A)$
ii) $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.
iii) $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$.
iv) Pour $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.
v) $\rho({}^tA) = \rho(A)$.

8° Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Dans les questions 9 à 11, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

9° Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

10° (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\| \geq \rho(A)^k$.
(b) On définit la partie de $\mathbb{R}_+$
$$E_A = \{\alpha > 0 \mid \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0\}.$$
Montrer que $E_A =]\rho(A), +\infty[$.

11° Montrer la formule
$$\lim_{k\to+\infty}\|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

12° Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{i,j}$, on pose $A_+ = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où $b_{i,j} = |a_{i,j}|$. Montrer l'inégalité

$$\rho(A) \leq \rho(A_+).$$

Correction :

6° On trouve 1, 0, 1, $\sqrt{2}$ et 4.

7° i) Vrai car $\mathrm{Sp}(\mu A) = \{\mu\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ (en effet c'est vrai si $\mu = 0$ et si $\mu \neq 0$ le résultat découle de $\ker(\mu A - \mu\lambda I_n) = \ker(A - \lambda I_n)$)

ii) Faux : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais $\sqrt{2}$ n'est pas inférieur à $0 + 0$.

iii) Faux car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$ et 1 n'est pas inférieur à 0.0.

iv) Vrai car ces deux matrices ont le même spectre.

v) Vrai car ces deux matrices ont le même spectre.

8° Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. On a donc $\dfrac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = |\lambda|$ et donc $|\lambda| \leq \|A\|$. On en déduit donc que $\rho(A) \leq \|A\|$.

9° Comme on travaille dans $\mathbb{C}$ la matrice A est trigonalisable, il existe donc T triangulaire supérieure et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$, d'après 7° iv) on a $\rho(T) = \rho(A)$, ainsi $\rho(T) < 1$, on a donc, pour tout i, que $a_{i,i} < 1$, on est donc dans le cadre de la question 5°, on en déduit donc que (T^k) converge vers 0, comme $(A^k) = (PT^kP^{-1})$ on en déduit donc que (A^k) tend aussi vers 0.

10° (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on a donc $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(A^k)$ (car si $x \neq 0$ est tel que $Ax = \lambda x$ alors $A^kx = \lambda^kx$), ainsi (par définition du rayon spectrale de A^k) on a : $\left|\lambda^k\right| \leq \rho(A^k)$. En prenant le max sur $|\lambda|$ dans cette inégalité on a $\rho(A)^k \leq \rho(A^k)$. Or, d'après la question 8° on a $\|A^k\| \geq \rho(A^k)$. On en déduit donc que $\|A^k\| \geq \rho(A)^k$.

(b) Si $\alpha > \rho(A)$, alors comme (7° i)) $\rho\left(\dfrac{A}{\alpha}\right) = \dfrac{\rho(A)}{|\alpha|} < 1$ on a (d'après 9°) $\left(\frac{A}{\alpha}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi $\alpha \in E_A$. Ce qui montre que $]\rho(A), +\infty[\subset E_A$.

Si $\alpha \in]0, \rho(A)]$, alors $\left\|\left(\dfrac{A}{\alpha}\right)^k\right\| = \dfrac{\|A^k\|}{\alpha^k} \overset{10^o a)}{\geq} \dfrac{\rho(A)^k}{\alpha^k} \geq 1$, ainsi cette suite ne peut pas tendre vers 0, donc $\alpha \notin E_A$.

Ce qui termine de montrer que $]\rho(A), +\infty[= E_A$

11° D'après 10° (a) on a : $\|A^k\|^{1/k} \geq \rho(A)$.

Posons $\varepsilon > 0$, comme $\rho(A) + \varepsilon > \rho(A)$ on a que la suite $\left(\left(\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^k\right)_k$ tend vers 0. Ainsi il existe un rang K tel que pour tout $k \geq K$: $\| \left(\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^k \| \leq 1$, ie. $\|A^k\| \leq |\rho(A) + \varepsilon|^k$. On a donc (en combinant avec le premier résultat énoncé) : $\forall\varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} / \forall k \geq K$, $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$. On a bien montré $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$.

12° Notons $a_{i,j}^{(k)}$ et $b_{i,j}^{(k)}$ les termes courants de A^k et de A_+^k. On peut montrer par récurrence (c'est rapide et sans difficulté) sur k que pour tout (i,j) : $\left|a_{i,j}^{(k)}\right| \leq \left|b_{i,j}^{(k)}\right|$. Soit j_0 tel que $\|A^k\| = \displaystyle\sum_{i=1}^n \left|a_{i,j_0}^{(k)}\right|$. On a $\|A^k\| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^n \left|b_{i,j_0}^{(k)}\right| \leq \|A_+^k\|$. Ainsi $\|A^k\|^{1/k} \leq \|A_+^k\|^{1/k}$. D'où (en faisant $k \to +\infty$) : $\rho(A) \leq \rho(A_+)$.

Troisième partie

Dans toute cette partie, A est une matrice **strictement positive** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On se propose de démontrer les propriétés suivantes.

(*i*) $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ est une valeur propre de A et toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho(A)$.

(*ii*) $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et $\ker(A - \rho(A)I_n)$ est engendré par un vecteur v_0 dont toutes les composantes sont strictement positives.

(*iii*) Si v est un vecteur propre de A dont toutes les composantes sont positives, alors $v \in \ker(A - \rho(A)I_n)$.

(*iv*) Pour tout vecteur positif non nul x, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{A^kx}{\rho(A)^k} = cv_0$.

13° Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que si

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|,$$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$.

14° Soient $x, y \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, alors on a l'implication suivante

$$(Ax = \lambda x \text{ et } {}^tAy = \mu y) \Rightarrow {}^txy = 0.$$

15° On suppose qu'il existe un réel positif μ et un vecteur positif non nul w tels que $Aw \geq \mu w$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^k w \geq \mu^k w$. En déduire que $\rho(A) \geq \mu$.

(b) Montrer que si $Aw > \mu w$, alors $\rho(A) > \mu$.

(c) On suppose à présent que dans le système d'inégalités $Aw \geq \mu w$, la k-ième inégalité est stricte, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} w_j > \mu w_k.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, en posant $w'_j = w_j$ si $j \neq k$ et $w'_k = w_k + \varepsilon$, on a $Aw' > \mu w'$. En déduire que $\rho(A) > \mu$.

16° Soit λ une valeur propre de A de module $\rho(A)$ et soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à λ. On définit le vecteur positif non nul v_0 par $(v_0)_i = |x_i|$ pour $1 \leq i \leq n$.

(a) Montrer que $Av_0 \geq \rho(A)v_0$, puis que

$$Av_0 = \rho(A)v_0.$$

(b) En déduire que $\rho(A) > 0$ et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (v_0)_i > 0.$$

(c) Montrer que x est colinéaire à v_0. En déduire que $\lambda = \rho(A)$.

La propriété (i) est démontrée.

17° En appliquant les résultats précédents à la matrice ${}^tA$, on obtient l'existence de $w_0 \in \mathbb{R}^n$, dont toutes les composantes sont strictement positives, tel que ${}^tAw_0 = \rho(A)w_0$. On pose

$$F = \{x \in \mathbb{C}^n \mid {}^txw_0 = 0\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par φ_A, et que

$$\mathbb{C}^n = F \oplus \mathbb{C}v_0.$$

(b) Montrer que si v est un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\mu \neq \rho(A)$, alors $v \in F$. En déduire la propriété (iii).

18° (a) On note ψ l'endomorphisme de F défini comme la restriction de φ_A à F. Montrer que toutes les valeurs propres de ψ sont de module strictement inférieur à $\rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et que

$$\ker(A - \rho(A)I_n) = \mathbb{C}v_0.$$

La propriété (ii) est démontrée.

(b) Montrer que si $x \in F$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{A^k x}{\rho(A)^k} = 0$.

(c) Soit x un vecteur positif non-nul. Déterminer la limite de $\dfrac{A^k x}{\rho(A)^k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

La propriété (iv) est démontrée.

Correction :

13° Montrons le résultat par récurrence sur n.

Initialisation : On suppose $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. On cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(z_1, z_2) = \lambda(|z_1|, |z_2|)$. Si $z_1 = 0$ alors $\lambda = e^{i\theta_2}$ (où θ_2 est un argument de z_2) convient, idem si $z_2 = 0$, supposons ces deux complexes non nuls.

On a : $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$. On en déduit donc que $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1 z_2|$. Or si un nombre complexe u est tel que $\mathrm{Re}(u) = |u|$ alors, en prenant son écriture algébrique $u = a + ib$, on a $a = \sqrt{a^2 + b^2}$ et donc $a^2 = a^2 + b^2$, ie. $b = 0$, on a donc montré que u était un nombre réel (positif). On en déduit déduit donc que $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}$, ie $z_1\overline{z_2} = \overline{z_1}z_2$, ainsi en posant $\lambda = \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$ on a le coefficient λ cherché.

Hérédité : Supposons le résultat pour k complexes, soit $(z_1, \ldots, z_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+1}$ tel que $|z_1 + \ldots + z_{k+1}| = |z_1| + \ldots + |z_{k+1}|$.
Si l'un des z_i est nul on peut directement utiliser l'hypothèse de récurrence et conclure, supposons les z_i tous non nuls.
On a (IT) : $|z_1 + \ldots + z_{k+1}| \leq |z_1 + \ldots + z_k| + |z_{k+1}| \leq |z_1| + \ldots + |z_k| + |z_{k+1}|$, par hypothèse les deux "$\leq$" sont des "=", ainsi $|z_1 + \ldots z_k| = |z_1| + \ldots + |z_k|$, ainsi par hypothèse de récurrence il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(z_1, \ldots, z_k) = \lambda(|z_1|, \ldots, |z_k|)$.
En procédant de même et en enlevant z_1 on a l'existence de $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $(z_2, \ldots, z_{k+1}) = \mu(|z_2|, \ldots, |z_{k+1}|)$.
Comme $z_2 \neq 0$, on a $\frac{z_2}{|z_2|} = \lambda = \mu$. Ce qui montre que $(z_1, \ldots, z_{k+1}) = \lambda(|z_1|, \ldots, |z_{k+1}|)$. Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

14° Soit $\lambda \neq \mu$ et $x, y \in \mathbb{C}^n$ tels que $Ax = \lambda x$ et ${}^tAy = \mu y$.
On a ${}^tyAx = {}^ty\lambda x = \lambda {}^tyx$ mais aussi ${}^tyAx = {}^t({}^tAy)x = {}^t(\mu y)x = \mu {}^tyx$. Ainsi $(\lambda - \mu){}^tyx = 0$, et comme $\lambda \neq \mu$ on a donc ${}^tyx = 0$, en transposant on a ${}^txy = 0$.

15° (a) Montrons le par récurrence sur k, la propriété est déjà initialisée à $k = 1$, procédons à l'hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^kw \geq \mu^kw$, ainsi le vecteur $A^kw - \mu^kw$ est positifs (ie tous ses coefficients le sont). Comme A est positive, il en va de même (démonstration évidente) pour $A(A^kw - \mu^kw)$, ie pour $A^{k+1}w - \mu^kAw$. Or $\mu^k(Aw - \mu w)$ est positif (car μ^k l'est et par hypothèse), en sommant ces deux vecteurs positifs on obtient un vecteur positif (démonstration évidente), ainsi $A^{k+1}w - \mu^{k+1}w \geq 0$, ce qui termine l'hérédité et la récurrence.
Comme tous les coefficients de A^kw sont plus grand que ceux de μ^kw et positifs on en déduit que $\|A^kw\|_1 \geq \mu^k\|w\|_1$, ainsi (définition de $\|\cdot\|$ et $w \neq 0$) : $\|A^k\| \geq \dfrac{\|A^kw\|_1}{\|w\|_1} \geq \mu^k$, ce qui montre que $\|A^k\| \geq \mu^k$ et donc que $\|A^k\|^{1/k} \geq \mu$, il ne reste plus qu'à faire tendre k vers $+\infty$ et à utiliser 11° pour obtenir $\rho(A) \geq \mu$.

(b) On a alors $(Aw)_i > \mu w_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On considère les $\frac{(Aw)_i}{w_i}$ pour les i tels que $w_i \neq 0$ (rq. w est positif non nul, pas nécessairement strictement positif) et on note λ la plus petite de ces valeurs, on a $\lambda > \mu$. On a alors $Aw \geq \lambda$ et par la question d'avant $\rho(A) \geq \lambda > \mu$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$ (pour l'instant quelconque), étudions les coefficients de $Aw' - \mu w'$. Pour $i \neq k$: $(Aw' - \mu w')_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}w_j - \mu w_i + a_{i,k}\varepsilon > 0$ (car $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}w_j - \mu w_i \geq 0$ et $a_{i,k}\varepsilon > 0$). Pour $i = k$: $(Aw' - \mu w')_k = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{k,j}w_j - \mu w_k - (\mu - a_{k,k})\varepsilon = (Aw - w)_k - (\mu - a_{k,k})\varepsilon$. On a $(Aw - w)_k > 0$, reste a choisir un ε tel que $(Aw' - \mu w')_k > 0$, si $\mu - a_{k,k} \leq 0$ toutes les valeurs de ε conviennent (par exemple $\varepsilon = 1$), si $\mu - a_{k,k} > 0$ il suffit de prendre, par exemple, $\varepsilon = \frac{(Aw-w)_k}{2(\mu - a_{k,k})}$. On a donc trouvé un w' positif tel que $Aw' > \mu w'$, ainsi $\rho(A) > \mu$ d'après la question précédente.

16° (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a (i-ème coordonnée de $Ax = \lambda x$) : $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = \lambda x_i$. Ainsi : $|\lambda x_i| = \left|\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \overset{IT}{\leq} \displaystyle\sum_{j=1}^n |a_{i,j}x_j|$, ie. $\rho(A)(v_0)_i\,|\lambda|\,(v_0)_i \leq \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}(v_0)_j$. Ainsi (comme c'est vrai pour tout i) : $\rho(A)v_0 \leq Av_0$. Si l'inégalité était stricte on pourrait utiliser 15° (c) (avec $w = v_0$ et $\mu = \rho(A)$) pour obtenir que $\rho(A) > \rho(A)$, ce qui est absurde. Ainsi $Av_0 = \rho(A)v_0$.

(b) Comme $x \neq 0$ il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_k \neq 0$, en prenant la k-ème coordonnée dans l'égalité de la question précédente on a $\rho(A) = \dfrac{(Av_0)_k}{(v_0)_k} = \dfrac{1}{|x_k|}\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{k,j}\,|x_j| \geq a_{k,k} > 0$.
Pour les autres coordonnées on utilise la i-ème coordonnée dans l'égalité de la question précédente : $(v_0)_i = \dfrac{(Av_0)_i}{\rho(a)} = \dfrac{1}{\rho(A)}\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}\,|x_j| \geq \dfrac{1}{\rho(A)}a_{i,k}x_k > 0$, les coordonnées de v_0 sont donc toutes strictement positives.

(c) On reprend la question 16° (a), l'IT écrite est en faite une égalité, ie : $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| = \displaystyle\sum_{j=1}^n |a_{i,j}x_j|$. La question 13° permet d'avoir l'existence d'un $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $(a_{i,1}x_1, \ldots, a_{i,n})x_n) = \mu(a_{i,1}\,|x_1|, \ldots, a_{i,n}\,|x_n|)$, ainsi pour tout j on a $a_{i,j}x_j = \mu a_{i,j}\,|x_j|$, comme $a_{i,j} > 0$ on en déduit que $x_j = \mu\,|x_j|$, ce qui montre que x et v_0 sont colinéaires, ce sont donc tous les deux des vecteurs propres de valeur propre ainsi $\lambda = \rho(A)$.

17° (a) Soit $x \in F$, montrons que Ax est encore dans F. On a ${}^t(Ax)w_0 = {}^tx{}^tAw_0 = \rho(A){}^txw_0 = 0$. Ainsi F est stable par φ_A.

Soit $\gamma : x \mapsto {}^t x w_0$, γ est une forme linéaire, et $F = \ker(\gamma)$. On a $\gamma(v_0) = \sum_{i=1}^n (v_0)_i (w_0)_i > 0$, ainsi $v_0 \notin F$, ce qui montre deux choses : F et $\mathbb{C}v_0$ sont en somme directe et γ n'est pas l'application nulle, ainsi $\mathrm{rg}(\gamma) \geq 1$ donc $\mathrm{rg}(\gamma) = 1$, ainsi (théorème du rang) $\dim F = n-1$. Ce qui termine de montrer que $\mathbb{C}^n = F \oplus \mathbb{C}v_0$.

(b) Si v est un vecteur propre de valeur propre $\mu \neq \rho(A)$ alors, en appliquant 14°, on a ${}^t v w_0 = 0$ et donc $v \in F$. Si tous les coefficients de v étaient réels et positifs on aurait ${}^t v w_0 > 0$ ce qui est absurde. Ainsi un vecteur propre dont tous les coefficients sont positifs ne peut être qu'associé à la valeur propre $\rho(A)$.

18° (a) Un élément de F ne peut pas être à coordonnée strictement positif (cela contredirait la définition de F), donc $\rho(A)$ ne peut pas être vecteur propre de ψ, ainsi ses valeurs propres sont de module strictement plus petits de $\rho(A)$ (si différent de $\rho(A)$ mais de même module alors la question 16° (c) donnerai une contradiction), ie $\chi_\psi(\rho(A)) \neq 0$, or $\chi_A(X) = (X-\rho(A))\chi_\psi(X)$ (il suffit d'écrire φ_A dans une base adaptée à la décomposition de 17° a) : $\begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où B est la matrice ψ dans cette base), ainsi $\rho(A)$ est racine simple. Ainsi $\dim(\ker(A - \rho(A)I_n)) = 1$, d'où $\ker(A-\rho(A)I_n) = \mathbb{C}v_0$.

(b) On a $\rho(\psi) < \rho(A)$, ainsi (cf 7° (i)) : $\rho(\frac{\psi}{\rho(A)}) < 1$, ainsi d'après la question 9° $\left(\frac{\psi}{\rho(A)}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi (continuité des endomorphismes) : pour tout $x \in F$, $\left(\frac{\psi(x)}{\rho(A)}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ie. $\frac{A^k x}{\rho(A)^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) Le vecteur x se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in \mathbb{C}v_0$, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $x_2 = \alpha v_0$. La question précédente montre que $\frac{A^k x_1}{\rho(A)^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\frac{A^k x_2}{\rho(A)^k} = \alpha v_0$. Reste à montrer que $\alpha > 0$.

On a ${}^t x w_0 = {}^t x_1 + \alpha {}^t v_0 w_0 = \alpha {}^t v_0 w_0$, donc $\alpha = \dfrac{{}^t x w_0}{{}^t v_0 w_0} > 0$.