DS 6 : samedi 24 janvier

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 ***(proche du cours et/ou des TDs).***

1° Vrai/Faux Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (démonstration ou contre-exemple).

(a) Dans le cas $I = \mathbb{R}$, si les f_n sont toutes périodiques de période T alors f est aussi périodique de période T.

(b) Si les f_n sont toutes continues alors f l'est aussi.

2° Déterminer la limite simple des suites de fonctions suivantes, et déterminer si la convergence est uniforme ou non.

(a) $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$

(b) $f_n(x) = x^n(1+x)$ sur $[0,1]$

3° Soit la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

(b) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

(c) Calculer f' (on l'exprimera sans somme) puis en déduire f sur $\mathbb{R}_+^\star$ (on ne cherchera pas a déterminer la constante).

4° Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

on pose ensuite $Y = X^2$.

(i) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.

(ii) Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 ***(*E3A PSI 2024 *exercice 1).***

Soit n un entier naturel. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ suivant la même loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1° **Calcul d'une somme**

(a) Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.

(b) En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.

(c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0} \binom{n}{k}^2$.

2° À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3° Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable }\}$. On utilisera la question 1.(c) pour simplifier le résultat.

4° Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible }\}$.

Exercice 3 ***(*E3A PC 2024 *exercice 1).***

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de E.

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Soit L l'application définie sur E par : $\forall P \in E, \quad L(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$.

1° Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2° Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3° Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4° Prouver qu'il existe une base $\mathcal{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5° Montrer que :
i) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
ii) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6° Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par : $\forall P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X$.

(a) Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.
(b) Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
(c) Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4 et 5
(d) Déterminer les valeurs propres de T_λ.
(e) L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?
(f) Justifier que T_λ est un automorphisme de E.
(g) Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
(h) Déterminer T_λ^{-1}.

Exercice 4 *(*E3A MP 2016 *Maths 1 exercice 4)*.

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et le produit B avec la probabilité $1 - p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1° On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X , la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2° Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3° Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

4° En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5° Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6° En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\mathrm{Cov}(X, N)$.

7° Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k, x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbb{P}(Z \leq k)$ en fonction de λ, $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1 - p))$.

8° On utilise dans cette question le langage de programmation `PYTHON`.

(a) Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de k et x données.
(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.

On rappel[1] le théorème d'intégration terme à terme (pour la dernière question de l'exercice suivant) :
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on suppose :

(i) Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux et **intégrables** sur I.

1. non présent dans le sujet

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S.

(iii) S est continue par morceaux sur I.

(iv) La série $\sum \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge.

Alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 *(Résolution d'une équation fonctionnelle :* CCINP PC 2021 *Exercice 2)***.**
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.

2° Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4° Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5° Montrer que si $f :]0, +\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6° En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

12° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13° En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$