DS 6⋆ : samedi 24 janvier

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

On rappel[1] le théorème d'intégration terme à terme (pour la dernière question de l'exercice suivant) :
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on suppose :

(i) Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux et **intégrables** sur I.

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S.

(iii) S est continue par morceaux sur I.

(iv) La série $\sum \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge.

Alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1 *(Résolution d'une équation fonctionnelle :* CCINP PC 2021 *Exercice 2).*
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.

2° Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4° Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5° Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6° En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

1. non présent dans le sujet

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

12° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13° En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 *Fonction zêta (*Centrale PC 2018*, maths 2, partie I).*

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On note $\mathcal{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

1° Déterminer $\mathcal{D}_\zeta$.

2° Montrer que ζ est continue sur $\mathcal{D}_\zeta$.

3° Étudier le sens de variations de ζ.

4° Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

5° Soit $x \in \mathcal{D}_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$.

6° En déduire, que pour tout $x \in \mathcal{D}_\zeta$, $1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

7° Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

8° Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9° Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

Exercice 3 *Le problème des moments (sans les parties IV et V,* Mines psi *2019, maths 2).*

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0, 1]$ ou $[0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si :

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

I – Quelques exemples

1. On considère $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0, +\infty[,\ g(x) = e^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0, +\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.

3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?

4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.

5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0, 1]$ (partie III), mais faux si $I = [0, +\infty[$ (partie V) ou $I = \mathbb{R}$.

II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6. Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0, 1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{ k \in \{0, 1, \ldots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \text{ et } Y = \left\{ k \in \{0, 1, \ldots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \alpha \right\}.$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III – Le problème des moments sur $[0, 1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0, 1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))P(x)\mathsf{d}x = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f - g$ sur $[0, 1]$.

13. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\mathsf{d}x = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\mathsf{d}x.$$

14. Montrer alors que $f = g$ sur $[0, 1]$.