DNS $7^{\frac{1}{2}}$: pour le vendredi 6 février

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(E3A PSI 2015, exercice 3).*

On pose, lorsque cela est possible : $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.

1° Déterminer l'ensemble de définition I de f.

2° En justifiant son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

3° Calculer $f(1)$. *On pourra utiliser l'application* $\varphi \ : \ u > 0 \mapsto \mathrm{ch}(u)$.

4° Calculer $f(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

5° Vérifier que f est positive sur I.

6° Montrer que f est décroissante sur I.

7° Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et préciser l'expression de $f'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

8° Soit $x \in I$. Démontrer la relation : $f(x+2) = \dfrac{x}{x+1} f(x)$.
On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.

9° Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.

10° Pour tout réel $x > 0$, on pose : $\phi(x) = x f(x) f(x+1)$.
Prouver que $\phi(x+1) = \phi(x)$. Calculer $\phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11° En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

12° Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$. En déduire que : $f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^\star}}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

13° En utilisant des parties entières, prouver que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

14° Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

15° Prouver que la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}_+^\star$.