DNS $7^{\frac{1}{2}\star}$: pour le vendredi 6 février

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *Le problème des moments (parties IV et V,* Mines psi *2019, maths 2)***.**

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\varphi(t)\mathsf{d}t,$$

où φ est définie en (**??**).

1. Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que $\hat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}} \mathsf{d}t.$$

3. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

4. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

V – Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

5. Montrer que f est bien une densité sur $[0, +\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x)) \mathsf{d}x.$$

6. Montrer que :

$$I_n = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathsf{d}u \right),$$

où $\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

7. À l'aide de la partie IV, en déduire que $I_n = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

8. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0, +\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.