DS 6 : samedi 24 janvier

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)***.**

1° Vrai/Faux Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (démonstration ou contre-exemple).

(a) Dans le cas $I = \mathbb{R}$, si les f_n sont toutes périodiques de période T alors f est aussi périodique de période T.

(b) Si les f_n sont toutes continues alors f l'est aussi.

2° Déterminer la limite simple des suites de fonctions suivantes, et déterminer si la convergence est uniforme ou non.

(a) $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$

(b) $f_n(x) = x^n(1+x)$ sur $[0,1]$

3° Soit la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

(b) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

(c) Calculer f' (on l'exprimera sans somme) puis en déduire f sur $\mathbb{R}_+^\star$ (on ne cherchera pas a déterminer la constante).

4° Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

on pose ensuite $Y = X^2$.

(i) Déterminer la loi du couple (X,Y) puis la loi de Y.

(ii) Déterminer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction :

1° (a) C'est vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x+T) = f_n(x)$, en faisant $n \to +\infty$, avec la convergence simple, on obtient $f(x+T) = f(x)$. Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ainsi que f est T-périodique.

(b) C'est faux ! Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0,1]$ on pose $f_n(x) = x^n$, toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$ qui n'est pas continue sur $[0,1]$.

2° (a) Pour $x = 1$ on a $f_n(1) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Déterminons si la convergence est uniforme. Soit $n \geq 2$, la fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$ on a $f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$, ainsi f_n' est positive sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et négative sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$, ainsi f_n est croissante puis décroissante, de plus $f_n(0) = f_n(1) = 0$ (faire le tableau de variation). On en déduit que $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1 - \frac{n}{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}(1 - \frac{n}{n+1})$. Or $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{-1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$. Ainsi $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence de (f_n) vers la fonction nulle est donc uniforme sur $[0,1]$.

(b) Pour $x = 1$ on a $f_n(1) = 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ et, pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vaut 2 en 1 et 0 sur $[0,1[$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ et que f ne l'est pas la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0,1]$.

3° Notons, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Si $x < 0$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 0$ on a la série harmonique alternée (qui converge d'après le TSA, on n'oubliera pas de préciser les hypothèses du TSA) et si $x > 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(-1)^{n+1}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} = 0$, ainsi $u_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc la série $\sum u_n(x)$ cva (donc cv).
Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$.

(b) Appliquons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions.
La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^\star$ d'après la question précédente.
Les fonctions $u_n : x \mapsto (-1)^n e^{-nx}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
La série des dérivées, $\sum u_n'(x) = \sum(-1)^n e^{-nx}$, converge normalement sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$; en effet : $\forall x \in [a,b], |u_n'(x)| \leq \mathrm{e}^{-na}$, ainsi $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} \leq \mathrm{e}^{-na}$ et $\sum \mathrm{e}^{-na}$ converge (série géométrique de raison $-1 < \mathrm{e}^{-a} < 1$).

On en déduit donc que f est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^\star$ donc sur $\mathbb{R}_+^\star$ et, pour $x > 0$, on a $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

(c) $\sum u_n'(x)$ est une série géométrique, on peut donc calculer sa somme : $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. En intégrant on trouve qu'il existe C tel que, pour tout $x \geq 0$, on ait $f(x) = \ln(1+e^{-x}) + C$.

4° (i) $Y(\Omega) = \{0,1,4\}$, $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = 0$ si $j \neq i^2$, $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=i^2)) = P(X=i)$.
$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) = 1/6$, $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-1) = 1/2$, $\mathbb{P}(Y=4) = 1/3$.
Il est bien entendu préférable ici de mettre ces résultats sous la forme de tableaux.

(ii) $\mathbb{E}(X) = 0$ par symétrie de même $\mathbb{E}(XY) = 0$ donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.
Pourtant X et Y ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=0)) = 0$ mais $\mathbb{P}(X=1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y=0) > 0$.

Exercice 2 *(*E3A PSI 2024 *exercice 1).*
Soit n un entier naturel. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ suivant la même loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega)\end{pmatrix}$.

1° **Calcul d'une somme**

(a) Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.

(b) En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.

(c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0} \binom{n}{k}^2$.

2° À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3° Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable }\}$. On utilisera la question 1.(c) pour simplifier le résultat.

4° Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible }\}$.

Correction :

1° **Calcul d'une somme**

(a) La formule du binôme de Newton donne $(1+X)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}X^k$. Ainsi, le coefficient de X^n est $\binom{2n}{n}$.

(b) On a : $(1+X)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}X^l = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{l}X^{k+l}$. Ainsi le coefficient devant X^n est (correspond à $k \in [\![0,n]\!]$ quelconque et $l = n-k$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

(c) Comme, pour tout k, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2° Notons M cette matrice, on a $\chi_M = (X-a)(X-c)$, si $a \neq c$, on a χ_M simplement scindé et donc M diagonalisable, si $a = c$ alors a est racine double, or $M - a\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc de noyau de dimension 1, ainsi la dimension de $E_a(M)$ est différente de la multiplicité de a, donc M n'est pas diagonalisable. Ce qui montre que la matrice est diagonalisable si et seulement si $a \neq c$.

3° D'après la question précédente, $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$ est l'évènement $(Y \neq Z)$. On a $\mathbb{P}(Y = Z) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}((Y=k)\cap(Z=k))$, par indépendance de Y et Z, on a $\mathbb{P}(Y=Z) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}(Z=k) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}) = 1 - \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

4° La matrice étant triangulaire, elle est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls. Ainsi l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est inversible}\}$ est $(Y \geq 1) \cap (Z \geq 1)$. Or $\mathbb{P}(Y \geq 1)\cap(Z \geq 1)) = \mathbb{P}(Y \geq 1)^2$ (indépendance et de même loi), ainsi $\mathbb{P}(Y \geq 1)\cap(Z \geq 1)) = (1 - \mathbb{P}(Y=0))^2 = (1 - \frac{1}{2^n})^2$.

Exercice 3 *(*E3A PC 2024 *exercice 1)***.**
Soit n un entier naturel non nul.
On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de E.

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Soit L l'application définie sur E par : $\forall P \in E, \quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$.

1° Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2° Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3° Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4° Prouver qu'il existe une base $\mathcal{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5° Montrer que :
i) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
ii) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6° Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par : $\forall P \in E, \quad T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X$.
(a) Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.
(b) Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.
(c) Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4 et 5
(d) Déterminer les valeurs propres de T_λ.
(e) L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?
(f) Justifier que T_λ est un automorphisme de E.
(g) Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.
(h) Déterminer T_λ^{-1}.

Correction :

1° Soient $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale, on a : $L(\lambda P + \mu Q) = \int_{-1}^{1} (\lambda P + \mu Q)(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \lambda P(t) + \mu Q(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} Q(t)\mathrm{d}t = \lambda L(P) + \mu L(Q)$.
L'application L est donc linéaire.
Comme elle est définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, L est une forme linéaire sur E.

2° Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. On a $L(e_k) = \displaystyle\int_{-1}^{1} e_k(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^k \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}$. Ainsi, on a $L(e_k) = 0$ si k est impair, $L(e_k) = \dfrac{2}{k+1}$ si k est pair.

3° On a en particulier $L(e_0) = 2 \neq 0$. L'application L est donc une forme linéaire non nulle sur E. En particulier, son noyau est un hyperplan de E. On a donc $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(E) - 1 = 2n$.

4° On a $L(e_1) = 0$ donc le vecteur e_1 appartient à $\mathrm{Ker}(L)$. En particulier, comme e_1 est non nul, la famille (e_1) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(L)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe donc une base de $\mathrm{Ker}(L)$ dont le premier vecteur est e_1.

5° Soient $P \in \mathrm{Vect}(e_0)$ et $Q \in \mathrm{Ker}(L)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda e_0$. On a donc $(P|Q) = \lambda(e_0|Q) = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} e_0(t)Q(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} Q(t)\mathrm{d}t = \lambda L(Q) = 0$. Les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont donc orthogonaux.
En particulier, ils sont en somme directe. De plus, on a $\dim(\mathrm{Vect}(e_0)) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1 + 2n = \dim(E)$. D'après une caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on a donc $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.
Remarque. On peut obtenir ce résultat sans utiliser de produit scalaire. En effet, on a $L(e_0) \neq 0$ donc e_0 n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(L)$. En particulier, la droite $\mathrm{Vect}(e_0)$ n'est pas incluse dans l'hyperplan $\mathrm{Ker}(L)$ donc, d'après le cours, $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont supplémentaires dans E.

6° Soit λ un réel.

(a) Soit $(P, Q) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de L, on a : $T_\lambda(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q) + \lambda L(\alpha P + \beta Q)X = \alpha P + \beta Q + \lambda(\alpha L(P) + \beta L(Q))X = \alpha P + \beta Q + \lambda\alpha L(P)X + \lambda\beta L(Q)X = \alpha(P + \lambda L(P)X) + \beta(Q + \lambda L(Q)X) = \alpha T_\lambda(P) + \beta T_\lambda(Q)$.
L'application T_λ est donc linéaire. De plus, pour tout $P \in E$, on a $\deg(P) \leq 2n$ et $\lambda L(P) \in \mathbb{R}$ donc $\deg(\lambda L(P)X) \leq 1$, d'où $\deg(T_\lambda(P)) \leq 2n$. L'application T_λ est donc définie sur E et à valeurs dans E. En conclusion, T_λ est un endomorphisme de E.

(b) Soit $P \in E$. Par linéarité de L, on a $(L \circ T_\lambda)(P) = L(T_\lambda(P)) = L(P) + \lambda L(P)L(X)$. Puisqu'on a $L(X) = L(e_1) = 0$, on en conclut qu'on a $(L \circ T_\lambda)(P) = L(P)$.

(c) On considère une base de E, notée $\mathcal{C}$, adaptée à la décomposition obtenue aux questions 4 et 5, c'est-à-dire une base de E dont les deux premiers vecteurs sont e_0 et e_1 et les autres sont dans $\mathrm{Ker}(L)$.
On a $T_\lambda(e_0) = e_0 + \lambda L(e_0)X = e_0 + 2\lambda X = e_0 + 2\lambda e_1$. De plus, pour tout $P \in \mathrm{Ker}(L)$, on a $L(P) = 0$ donc $T_\lambda(P) = P$.

La matrice de T_λ relativement à la base $\mathcal{C}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) La matrice A étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, T_λ admet pour unique valeur propre 1.

(e) Puisque 1 est l'unique valeur propre de T_λ, l'endomorphisme T_λ est diagonalisable si et seulement si le polynôme $X - 1$ annule T_λ, si et seulement si le polynôme $X - 1$ annule A, ce qui équivaut à $A = I_{2n+1}$. En conclusion, l'endomorphisme T_λ est diagonalisable si et seulement si on a $\lambda = 0$.

(f) Puisque 0 n'est pas valeur propre de T_λ, T_λ est un automorphisme de E.

(g) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on a : $(T_\alpha \circ T_\beta)(P) = T_\alpha(T_\beta(P)) = T_\beta(P) + \alpha L(T_\beta(P))X = P + \beta L(P)X + \alpha L(P)X = P + (\alpha + \beta)L(P)X$. D'après le résultat de la question 6b On a donc $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

(h) En particulier, on a $T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_0 = \mathrm{Id}_E$. En composant par T_λ^{-1} à gauche, on obtient ainsi $T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}$.

Exercice 4 *(*E3A MP 2016 *Maths 1 exercice 4).*

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1° On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X , la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2° Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3° Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

4° En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5° Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6° En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\mathrm{Cov}(X, N)$.

7° Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k,x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbb{P}(Z \leq k)$ en fonction de λ, $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1-p))$.

8° On utilise dans cette question le langage de programmation `PYTHON`.

(a) Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k,x)$ à partir des valeurs de k et x données.

(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.

Correction :

1° X représente le nombre de clients qui achètent le produit A, comme les choix des clients sont indépendants on a donc affaire à une loi binomiale, ainsi $X \sim \mathcal{B}(4,p)$, ainsi $\mathbb{E}(X) = 4p$. Il en va de même pour $Y \sim \mathcal{B}(4, 1-p)$, ainsi $\mathbb{E}(Y) = 4(1-p)$.
On a ici $X + Y = 4$, ainsi la valeur de X détermine complètement la valeur de Y, on a $Z = \max(X,Y) = \max(X, 4-X)$, ainsi $Z(\Omega) = \{2,3,4\}$ (car les couples possibles pour les valeurs de (X,Y) sont $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$ et $(4,0)$ qui donnent comme valeur pour Z 4,3,2,3 et 4 respectivement), ce qui permet de calculer la loi de Z.
On a $\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$, $\mathbb{P}(Z=3) = \mathbb{P}(X=1 \text{ ou } X=3) = 4p(1-p)^3 + 4p^3(1-p) = 4p(1-p)(1-2p+2p^2)$ et $\mathbb{P}(Z=4) = \mathbb{P}(X=0 \text{ ou } X=4) = p^4 + (1-p)^4$.
Z correspond au nombre de boites ouvertes.

2° la loi de X sachant $(N = n)$ est, comme au 1°, la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

3° Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\mathbb{P}(X=k, N=n) = \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq n+1 \\ \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \end{cases}$$

4° On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $((N=n))_{n\in\mathbb{N}}$ on a : $\mathbb{P}(X=k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k, N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+k}}{k!n!}p^k(1-p)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}$.
Ainsi X suit une loi de Poisson de paramètre λp, donc $\mathbb{E}(X) = \lambda p$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda p$.

5° Tout d'abord, en remplaçant p par $1-p$ à la question précédente on trouve $Y \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$.
Pour $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ on a d'une part : $\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell) = \mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!}$.
D'autre part (en utilisant $X+Y=N$) : $\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \mathbb{P}(X=k, X+Y=k+\ell) = \mathbb{P}(X=k, N=k+\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\binom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^{k+\ell-k}$ (car k est bien compris entre 0 et $k+\ell$). Ainsi $\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}p^k(1-p)^\ell = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!}$.
Ainsi, pour tout k et ℓ, on a : $\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell)$, ainsi les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6° En utilisant la bilinéarité de la covariance et que $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ puisque X et Y sont indépendantes on trouve : $\mathrm{Cov}(X,N)=\mathrm{Cov}(X,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{V}(X)+0=\lambda p$.

7° Soit $k\in\mathbb{N}$, on a (le maximum de deux nombres est plus petit que k si et seulement si ils le sont tous les deux) :$\mathbb{P}(Z\leq k)=\mathbb{P}((X\leq k)\cap(Y\leq k))$, par indépendance de X et Y on en déduit que $\mathbb{P}(X\leq k)=\mathbb{P}(X\leq k)\mathbb{P}(Y\leq k)$.

Or $\mathbb{P}(X\leq k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^i}{i!}=\mathrm{e}^{-\lambda p}S(k,\lambda p)$. De même (en remplaçant p par $1-p$) on a $\mathbb{P}(Y\leq k)=\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}S(k,\lambda(1-p))$.
Ainsi $\mathbb{P}(X\leq k)=\mathrm{e}^{-\lambda}S(k,\lambda p)S(k,\lambda(1-p))$.

8° (a)
```
def S(k, x):
    res, u = 1, 1
    for j in range(1, k+1):
        u = u * x/j
        res += u
    return res
```
(b) Le commerçant est en rupture de stock si Z est strictement plus grand que 5, on doit donc calculer $\mathbb{P}(Z>5)=1-\mathbb{P}(Z\leq 5)=\mathrm{e}^{-10}S(5,5)S(5,5)$
```
from math import exp
print(exp(-10)*S(5,5)**2)
```

On rappel[1] le théorème d'intégration terme à terme (pour la dernière question de l'exercice suivant) :
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on suppose :

(i) Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux et **intégrables** sur I.

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S.

(iii) S est continue par morceaux sur I.

(iv) La série $\sum\int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 *(Résolution d'une équation fonctionnelle :* CCINP PC 2021 *Exercice 2)***.**
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \text{ et } \forall x\in]0,+\infty[,\quad f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x^2}.\qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad \varphi_k(x)=\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\varphi_k$.

2° Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$.

3° En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varphi_k(x)\right|\leq\frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

1. non présent dans le sujet

4° Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5° Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6° En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Correction :

1° Pour $x > 0$ fixé on a $|\varphi_k(x)| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, ainsi $\sum \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge, ce qui montre bien la convergence simple de $\sum \varphi_k$ sur $]0,+\infty[$.
Alternative : On peut aussi utiliser le TSA directement ici, ce qui fait gagner un peut de temps pour la question 3°.

2° Pour $x > 0$, on a : $\varphi(x+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} = -(\varphi(x) - \varphi_0(x)) = -\varphi(x) + \frac{1}{x^2}$. Ce qui montre bien que $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° Pour $x > 0$, la série $\sum \varphi_k(x)$ est une série alternée qui relève du TSA (elle est bien alternée et $(|\varphi_k(x)|)_k = \left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_k$ tend bien vers 0 en décroissant), ce qui donne non seulement la convergence de la série, mais aussi la domination du reste, ie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en notant $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$, que $|R_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2}$.

4° Pour $x > 0$ on a $R_0(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x)$, la question précédente donne donc $\left|\varphi(x) - \frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$, ainsi $\varphi - \varphi_0$ admet 0 comme limite en $+\infty$, et comme φ_0 tend aussi vers 0 en $+\infty$ on a donc $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, ce qui montre, avec la question 2°, que φ est une solution de (P).
Alternative : La question précédente permet de montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ de (R_n) vers la fonction nulle, ainsi $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^\star$, comme de plus tous les φ_k tendent vers 0 en $+\infty$, on peut appliquer le théorème de la double limite pour avoir le résultat.

5° Soit f une solution de (P). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la relation de (P) appliquée à $x+k$ donne : $f(x+k+1) - f(x+k) = \frac{1}{(x+k)^2}$, on multiplie ces égalités par $(-1)^k$ et on somme pour obtenir : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k+1) + (-1)^k f(x+k) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k) = (-1)^n f(x+n+1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(x+k) + f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(x+k) = (-1)^n f(x+n+1) + f(x)$. Ce qui montre bien que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.
Alternative : Démonstration par récurrence sur n.

6° On vient de démontrer, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)$, il ne reste plus qu'a faire tendre n vers $+\infty$, ce qui est possible à droite puisque $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} f(x+n+1) = 0$ (premier résultat de la propriété (P)) et que $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) = \varphi(x)$. Ainsi $f(x) = \varphi(x)$, et donc $f = \varphi$, ce qui montre bien que φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Correction :

7° Pour $x > \varepsilon$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, ainsi $\|\varphi_k\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$. Ainsi la série $\sum \varphi_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\varepsilon,+\infty[$.
Alternative Utiliser 3° pour avoir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ de (R_n) vers la fonction nulle.

8° Comme toutes les fonctions φ_k sont continues sur $[\varepsilon,+\infty[$ et que la convergence de la série $\sum \varphi_k$ y est uniforme on a que φ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc φ continue sur $]0,+\infty[$.
Comme φ vérifie la propriété (P), pour tout $x > 0$ on a : $x^2\varphi(x+1) + x^2\varphi(x) = 1$, or $\lim\limits_{x\to 0} x^2\varphi(x+1) = 0$ (par continuité de φ en 1) on a donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\varphi(x) = 1$, ie $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

9° Appliquons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions. On a :

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, $\varphi_k'(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

(ii) $\sum \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers φ.

(iii) Soit $\varepsilon > 0$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [\varepsilon,+\infty[$, on a $|\varphi_k'(x)| \leq \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$, ainsi $\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ et comme $\sum \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ converge on a que $\sum \varphi_k'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$, ceci étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $,+\infty[$, de plus, pour $x > 0$, on a : $\varphi'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

10° Pour $x > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est une série alternée qui relève du TSA (son terme général est bien alternée et en valeur absolue est décroissant et tend vers 0), ainsi sa somme est du signe de son premier terme, ce qui montre $\varphi'(x) \leq 0$ et donc φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

11° Pour $x > 1$ on a $\varphi(x+1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x-1)$ (décroissance) en ajoutant $\varphi(x)$ on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) \leq 2\varphi(x) \leq \varphi(x) + \varphi(x-1)$, comme de plus φ vérifie la propriété (P) on a donc $\frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$, il ne reste plus qu'à multiplier par x^2 pour obtenir $1 \leq 2x^2\varphi(x) \leq \frac{x^2}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\varphi(x) = 1$, ie : $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

12° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13° En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Correction :

12° Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $\varepsilon > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est continue sur $[\varepsilon, 1]$, elle est donc intégrable sur cet intervalle, procédons par intégration par parties, pour $t \in [\varepsilon, 1]$ posons $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{t^{x+k}}{x+k}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$ et pour $t \in [\varepsilon, 1]$ on a $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = t^{x+k-1}$. Ainsi $\displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t = \left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{x+k}}{x+k}\frac{1}{t}\mathsf{d}t = 0 - \frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{x+k}\int_\varepsilon^1 t^{x+k-1}\mathsf{d}t = -\frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{x+k}\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_\varepsilon^1 = -\frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{\varepsilon^{x+k}}{(x+k)^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{(x+k)^2}$.
Ce qui montre bien la convergence de l'intégrale sur $]0, 1]$ (et donc l'intégrabilité puisque la fonction est de signe constant) et la formule.

13° On vient de démontrer, pour tout $x > 0$, que $\displaystyle\varphi(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t$. De plus on peut tout de suite remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t) = t^{x-1}\ln(t)\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k = \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ (série géométrique). Appliquons le théorème d'intégration terme à terme, pour cela on note, pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$, $f_k(t) = (-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)$.
On a :

(i) Toutes les fonctions f_k sont continues par morceaux et intégrables sur $]0, 1]$.

(ii) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement vers $S : t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ sur $]0, 1[$.

(iii) La fonction S est continue par morceaux sur $]0, 1[$.

(iv) Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $a_k = \int_0^1 |f_k(t)|\,\mathsf{d}t$, d'après la question précédente $a_k = \frac{1}{(x+k)^2}$, ainsi $\sum a_k$ converge

Ainsi S est intégrable sur $]0, 1[$ (donc sur $]0, 1]$ puisque définie en 1) et $\displaystyle\int_0^1 S(t)\mathsf{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\mathsf{d}t$.

On a bien montré que : $\forall x > 0$, $\displaystyle\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathsf{d}t$.