DS 6* : samedi 24 janvier

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

On rappel[1] le théorème d'intégration terme à terme (pour la dernière question de l'exercice suivant) :
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on suppose :

(i) Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux et **intégrables** sur I.
(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S.
(iii) S est continue par morceaux sur I.
(iv) La série $\sum \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge.

Alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1 *(Résolution d'une équation fonctionnelle : CCINP PC 2021 Exercice 2).*
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.

2° Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4° Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5° Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6° En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

1. non présent dans le sujet

Correction :

1° Pour $x>0$ fixé on a $|\varphi_k(x)| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, ainsi $\sum \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge, ce qui montre bien la convergence simple de $\sum \varphi_k$ sur $]0,+\infty[$.
Alternative : On peut aussi utiliser le TSA directement ici, ce qui fait gagner un peut de temps pour la question 3°.

2° Pour $x>0$, on a : $\varphi(x+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} = -(\varphi(x)-\varphi_0(x)) = -\varphi(x) + \frac{1}{x^2}$. Ce qui montre bien que $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° Pour $x>0$, la série $\sum \varphi_k(x)$ est une série alternée qui relève du TSA (elle est bien alternée et $(|\varphi_k(x)|)_k = \left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_k$ tend bien vers 0 en décroissant), ce qui donne non seulement la convergence de la série, mais aussi la domination du reste, ie, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et en notant $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$, que $|R_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2}$.

4° Pour $x>0$ on a $R_0(x) = \varphi(x)-\varphi_0(x)$, la question précédente donne donc $\left|\varphi(x)-\frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$, ainsi $\varphi-\varphi_0$ admet 0 comme limite en $+\infty$, et comme φ_0 tend aussi vers 0 en $+\infty$ on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, ce qui montre, avec la question 2°, que φ est une solution de (P).
Alternative : La question précédente permet de montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ de (R_n) vers la fonction nulle, ainsi $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^\star$, comme de plus tous les φ_k tendent vers 0 en $+\infty$, on peut appliquer le théorème de la double limite pour avoir le résultat.

5° Soit f une solution de (P). Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$. Pour tout $k\in [\![0,n]\!]$, la relation de (P) appliquée à $x+k$ donne : $f(x+k+1)-f(x+k) = \frac{1}{(x+k)^2}$, on multiplie ces égalités par $(-1)^k$ et on somme pour obtenir : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k+1) + (-1)^k f(x+k) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k) =$ $(-1)^n f(x+n+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(x+k) + f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(x+k) = (-1)^n f(x+n+1) + f(x)$. Ce qui montre bien que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.
Alternative : Démonstration par récurrence sur n.

6° On vient de démontrer, pour tout $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$ que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)$, il ne reste plus qu'a faire tendre n vers $+\infty$, ce qui est possible à droite puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} f(x+n+1) = 0$ (premier résultat de la propriété (P)) et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) = \varphi(x)$. Ainsi $f(x) = \varphi(x)$, et donc $f=\varphi$, ce qui montre bien que φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :
$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$
10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :
$$\forall x\in]1,+\infty[,\quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$
En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Correction :

7° Pour $x > \varepsilon$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, ainsi $\|\varphi_k\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$. Ainsi la série $\sum \varphi_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\varepsilon, +\infty[$.
Alternative Utiliser 3° pour avoir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ de (R_n) vers la fonction nulle.

8° Comme toutes les fonctions φ_k sont continues sur $[\varepsilon, +\infty[$ et que la convergence de la série $\sum \varphi_k$ y est uniforme on a que φ est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc φ continue sur $]0, +\infty[$.
Comme φ vérifie la propriété (P), pour tout $x > 0$ on a : $x^2\varphi(x+1) + x^2\varphi(x) = 1$, or $\lim\limits_{x\to 0} x^2\varphi(x+1) = 0$ (par continuité de φ en 1) on a donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\varphi(x) = 1$, ie $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

9° Appliquons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions. On a :

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $\varphi_k'(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

(ii) $\sum \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers φ.

(iii) Soit $\varepsilon > 0$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [\varepsilon, +\infty[$, on a $|\varphi_k'(x)| \leq \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$, ainsi $\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ et comme $\sum \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ converge on a que $\sum \varphi_k'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, +\infty[$, ceci étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $, +\infty[$, de plus, pour $x > 0$, on a : $\varphi'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

10° Pour $x > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est une série alternée qui relève du TSA (son terme général est bien alternée et en valeur absolue est décroissant et tend vers 0), ainsi sa somme est du signe de son premier terme, ce qui montre $\varphi'(x) \leq 0$ et donc φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

11° Pour $x > 1$ on a $\varphi(x+1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x-1)$ (décroissance) en ajoutant $\varphi(x)$ on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) \leq 2\varphi(x) \leq \varphi(x) + \varphi(x-1)$, comme de plus φ vérifie la propriété (P) on a donc $\frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$, il ne reste plus qu'à multiplier par x^2 pour obtenir $1 \leq 2x^2\varphi(x) \leq \frac{x^2}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\varphi(x) = 1$, ie : $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

12° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13° En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathsf{d}t.$$

Correction :

12° Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $\varepsilon > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est continue sur $[\varepsilon, 1]$, elle est donc intégrable sur cet intervalle, procédons par intégration par parties, pour $t \in [\varepsilon, 1]$ posons $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{t^{x+k}}{x+k}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$ et pour $t \in [\varepsilon, 1]$ on a $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = t^{x+k-1}$. Ainsi $\displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t = \left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{x+k}}{x+k}\frac{1}{t}\mathsf{d}t = 0 - \frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{x+k}\int_\varepsilon^1 t^{x+k-1}\mathsf{d}t = -\frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{x+k}\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_\varepsilon^1 = -\frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{\varepsilon^{x+k}}{(x+k)^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{(x+k)^2}$.
Ce qui montre bien la convergence de l'intégrale sur $]0, 1]$ (et donc l'intégrabilité puisque la fonction est de signe constant) et la formule.

13° On vient de démontrer, pour tout $x>0$, que $\varphi(x)=-\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)\mathrm{d}t$. De plus on peut tout de suite remarquer que $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)=t^{x-1}\ln(t)\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k=\dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ (série géométrique). Appliquons le théorème d'intégration terme à terme, pour cela on note, pour $k\in\mathbb{N}$ et $t\in]0,1[$, $f_k(t)=(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)$. On a :

(i) Toutes les fonctions f_k sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,1]$.

(ii) $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement vers $S : t\mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ sur $]0,1[$.

(iii) La fonction S est continue par morceaux sur $]0,1[$.

(iv) Pour $k\in\mathbb{N}$, notons $a_k=\int_0^1|f_k(t)|\,\mathrm{d}t$, d'après la question précédente $a_k=\frac{1}{(x+k)^2}$, ainsi $\sum a_k$ converge

Ainsi S est intégrable sur $]0,1[$ (donc sur $]0,1]$ puisque définie en 1) et $\displaystyle\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t$.

On a bien montré que : $\forall x>0,\ \varphi(x)=-\displaystyle\int_0^1\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 *Fonction zêta (*CENTRALE PC 2018*, maths 2, partie I).*

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par : $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. On note $\mathcal{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

1° Déterminer $\mathcal{D}_\zeta$.

2° Montrer que ζ est continue sur $\mathcal{D}_\zeta$.

3° Étudier le sens de variations de ζ.

4° Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

5° Soit $x\in\mathcal{D}_\zeta$ et soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\leq\frac{1}{n^x}\leq\int_{n-1}^n\frac{dt}{t^x}$.

6° En déduire, que pour tout $x\in\mathcal{D}_\zeta$, $1+\dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}}\leq\zeta(x)\leq 1+\dfrac{1}{x-1}$.

7° Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

8° Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9° Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

1° On sait que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$, ainsi l'ensemble de définition de la fonction ζ est $\mathcal{D}_\zeta=]1,+\infty[$.

2° Soit $a\in]1,+\infty[$. On a alors, pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout réel $x\geq a$, que : $0<\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^a}$, on a donc $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[}\leq\frac{1}{n^a}$, comme la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^a}$ converge, ainsi (par théorème de comparaison des SATP), la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a,\ +\infty[$. Comme, de plus, toutes les fonctions f_n sont continues sur $[a,+\infty[$, la fonction ζ est alors continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
Comme a est quelconque dans $]1,+\infty[$, on en déduit la continuité de la fonction ζ sur $]1,+\infty[$.

3° Soit $x>y>1$, pour $n\geq 1$, $t\mapsto\frac{1}{n^t}=\mathrm{e}^{-t\ln(n)}$ est décroissante donc $\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^y}$, en sommant sur $n\in\mathbb{N}^\star$ (possible d'après 1°) on trouve $\zeta(x)\leq\zeta(y)$ et donc ζ est décroissante sur son ensemble de définition.

4° On a ζ décroissante et clairment minorée par 0, ainsi ζ admet une limite en $+\infty$.

5° Soit $x\in\mathcal{D}_\zeta$ et soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$.
La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^x}=\mathrm{e}^{-x\ln(t)}$ est continue (donc intégrable sur tout segment) et est décroissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout $t\in[\![n,n+1]\!]$ on a $\frac{1}{t^x}\leq\frac{1}{n^x}$, ainsi $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\leq\frac{1}{n^x}$, en procédant de même sur $[\![n-1,n]\!]$ on a pour tout $t\in[\![n-1,n]\!]$ que $\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{t^x}$ et donc que $\displaystyle\frac{1}{n^x}\leq\int_{n-1}^n\frac{\mathrm{d}t}{t^x}$. Ce qui montre bien que $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\leq\frac{1}{n^x}\leq\int_{n-1}^n\frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

6° Pour tout $n \geq 2$ et $x > 1$: $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}}\right]_n^{n+1}$.
Soit $N \geq 2$, en sommant les inégalités de la question précédente (et en utilisant la relation de Chasles) pour n allant de 2 à N on trouve : $\displaystyle\int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.
Or $\displaystyle\int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}}\right]_2^{N+1} = \frac{1}{(1-x)(N+1)^{x-1}} - \frac{1}{(1-x)2^{x-1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$, et de même $\displaystyle\int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}}\right]_1^{N} = \frac{1}{(1-x)(N)^{x-1}} - \frac{1}{(1-x)1^{x-1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(x-1)}$.
Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité et en rajoutant 1 on trouve bien que $1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

7° On a $\displaystyle\lim_{x\to1^+} 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = +\infty$, ainsi $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \zeta(x) = +\infty$ par comparaison.

8° Les deux expressions qui encadrent $\zeta(x)$ dans la question 6° convergent vers 1 quand x tend vers $+\infty$, ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

9° Allure de la représentation graphique de ζ : Strictement décroissante, avec la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale en 1 et $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

Exercice 3 *Le problème des moments (sans les parties IV et V,* MINES PSI *2019, maths 2)***.**
Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si :

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

I – Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,+\infty[$, $g(x) = e^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.

3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?

4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.

5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0,1]$ (partie III), mais faux si $I = [0,+\infty[$ (partie V) ou $I = \mathbb{R}$.

Correction :

1. La fonction g est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, de plus pour $M \geq 0$ on a $\displaystyle\int_0^M g(t)\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^M = 1 - \mathrm{e}^{-M} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ainsi g est bien de masse 1, c'est donc une densité de probabilité.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est un petit o de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ quand $x \to +\infty$, ainsi g admet un moment d'ordre n fini. De plus, les fonctions $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et uv possède une limite finie en $+\infty$ (qui est 0), ainsi par IPP on a : $m_{n+1}(g) = \Big[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{+\infty} + (n+1)\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = (n+1)m_n(g)$. La suite $(m_n(g))$ vérifie donc la même relation de récurrence d'ordre 1 que $(n!)$ avec la même condition initiale, on en déduit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $m_n(g) = n!$.

2. À la lecture du sujet il est admis que φ est une densité (en particulier φ est intégrable et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $x \mapsto x^n\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x^n\varphi(x)|\mathrm{d}x$ n'est donc généralisée qu'en $+\infty$ et $-\infty$, la fonction $x \mapsto |x|^n\varphi(x)$ étant paire, on peut se contenter de l'étude en $+\infty$ puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty}|x^n\varphi(x)|\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0|x^n\varphi(x)|\mathrm{d}x$ sont de même nature (via le changement de variable $t = -x$, bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_-$ et de classe $\mathcal{C}^1$). Or $x^2x^n\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée), ie $x^n\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est une intégrale (de Riemann) convergente, il en va de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty}|x^n\varphi(x)|\mathrm{d}x$ et donc pour $\displaystyle\int_0^{+\infty}|x^n\varphi(x)|\mathrm{d}x$.
On a bien montré que $x \mapsto x^n\varphi(x)$ était intégrable sur $\mathbb{R}$, ie que tous les moments de φ sont finis.

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^{2p+1}\varphi(x)$ est une fonction impaire, donc son intégrale sur tout intervalle centré en 0 est nul, en particulier $m_{2p+1}(\varphi) = 0$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $m_{2p}(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^{2p}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.
Posons $u : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x^2/2}$ et $v : x \mapsto x^{2p-1}$, u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de plus (par croissance comparée) $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$. Donc par IPP on a :
$m_{2p}(\varphi) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\Big[-x^{2p-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty}(2p-1)x^{2p-2}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x\right) = (2p-1)m_{2p-2}(\varphi)$.
On a donc, par récurrence directe (on peut aussi montrer la formule finale par récurrence) : $m_{2p} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^p(2k-1)\right)m_0(\varphi) = \left(\prod_{k=1}^p\frac{(2k)(2k-1)}{2k}\right)m_0(\varphi) = \frac{\prod_{k=1}^p 2k(2k-1)}{\prod_{k=1}^p 2k}m_0(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^pp!}$ (puisque $m_0(\varphi) = 1$).

5. Soit $f : x \mapsto \frac{1/\pi}{x^2+1}$, la fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, de plus elle est intégrable (généralisée qu'en $\pm\infty$, mais y est convergente par équivalence avec une intégrale de Riemann). De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1/\pi}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 1$. C'est donc une densité de probabilité.
Cependant $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}$, donc par règle des équivalent (et par divergence de cette intégrale de Riemann) : $\displaystyle\int_1^{+\infty}|xf(x)|\mathrm{d}x$ diverge. Ainsi f n'admet pas de moment fini d'ordre 1.

II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x-\frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \text{ et } Y = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}.$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$.

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Correction :

6. D'après la formule du binôme de Newton : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1^n = 1$.

7. La formule est vérifiée pour $n=0$, supposons $n \geq 1$. Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ on a $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(n-k))!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} + nx^n = n\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1} + nx^n = nx\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = nx$.

Alternative : Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^k$, on dérive cette égalité de polynômes en x par rapport à x et on obtient : $n(x+y)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}y^k$, on multiplie par x des deux cotés puis on prend en $y = 1-x$ on obtient : $nx(x+1-x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^k$, ie le résultat escompté.

8. La formule est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$, supposons $n \geq 2$.
On pourrait procéder comme la question précédente, mais on va plutôt utiliser la méthode alternative. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $nx(x+y)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k y^k$, on dérive par rapport à x on a : $n(x+y)^{n-1} + n(n-1)x(x+y)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}y^k$. Il ne reste plus qu'à multiplier par x puis à prendre $y = 1-x$ pour obtenir $nx(x+1-x)^{n-1}+n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^k$, ie $nx+n(n-1)x^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^k$.

9. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a (d'après les trois questions précédentes) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - 2nx\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx+n(n-1)x^2-2n^2x^2+n^2x^2 = nx(1-x) \leq n$ (puisque $x \in [0, 1]$), ainsi $C = 1$ convient (on peut même prendre $C = \frac{1}{4}$, maximum de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$ atteint en $\frac{1}{2}$).

10. *Remarque* : la propriété :$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\alpha > 0 \,/\, \forall(x, y) \in I^2$, $|(|\, x-y) < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ s'appelle l'uniforme continuité de f sur I. Le résultat admis est le théorème de Heine (une fonction continue sur un segment y est uniformément continue).
Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on remarque tout d'abord qu'en multipliant le résultat de la question 6. par $f(x)$ que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(x) = f(x)$. On introduit α donné par (2). On a alors : $|B_n(x)-f(x)| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\right|$. On coupe la somme sur k en deux suivant que k soit dans X ou dans Y et on utilise l'inégalité triangulaire, on obtient ainsi : $|B_n(x)-f(x)| = \displaystyle\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| + \sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|$. Or pour $k \in X$ on a (par la propriété (2)) : $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|$, et dans tous les cas (en particulier pour $k \in Y$) : $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| \leq \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$.
On a donc : $|B_n(x)-f(x)| = \varepsilon\displaystyle\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + 2\|f\|_\infty\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Or (somme de termes positifs) : $\displaystyle\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$. On a bien montré que : $|B_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty\displaystyle\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

11. Pour $k \in Y$, $\left|x-\frac{k}{n}\right| \geq \alpha$, ie $\left|\frac{nx-k}{n}\right| \geq \alpha$, ie $\frac{(k-nx)^2}{\leq}\frac{1}{\alpha^2n^2}$, ainsi : $\displaystyle\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k\in Y}\frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k\in Y}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2n^2}Cn$ (où on a utilisé la question 9. et qu'on avait une somme de termes positifs).
Avec la question précédente on a : $|B_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon + \dfrac{2C}{\alpha^2n}\|f\|_\infty$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2C}{\alpha^2n}\|f\|_\infty = 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$: $\frac{2C}{\alpha^2n}\|f\|_\infty \leq \varepsilon$, on remarque que ce rang N ne dépend pas de x. Ainsi pour tout $n \geq N$, on a pour tout $x \in [0, 1]$, que $|B_n(x)-f(x)| \leq 2\varepsilon$ et donc $\|B_n-f\|_\infty \leq 2\varepsilon$.

III – Le problème des moments sur $[0, 1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0, 1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))P(x)\mathrm{d}x = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f-g$ sur $[0,1]$.

13. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\mathsf{d}x = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\mathsf{d}x.$$

14. Montrer alors que $f=g$ sur $[0,1]$.

Correction :

12. Notons $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Par hypothèse on a pour tout $k\in\mathbb{N}$: $m_k(f)-m_k(g)=0$. On a (permutation somme finie et intégrale propre) : $\int_0^1 (f(x)-g(x))P(x)\mathsf{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 (f(x)-g(x))x^k\mathsf{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k(m_k(f)-m_k(g))=0$.

13. pour $n\in\mathbb{N}$: $\left|\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\mathsf{d}x - \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\mathsf{d}x\right| = \left|\int_0^1 (f(x)-g(x))(P_n(x)-(f(x)-g(x)))\mathsf{d}x\right| \leq \|P_n-f-g\|_\infty \int_0^1 f(x)-g(x)\mathsf{d}x$. Comme par hypothèse (P_n) converge uniformément vers $f-g$ sur $[0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty}\|P_n-f-g\|_\infty \int_0^1 f(x)-g(x)\mathsf{d}x=0$, donc par encadrement : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\mathsf{d}x = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\mathsf{d}x$.

14. Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est un polynôme, les deux questions précédentes donnent : $\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\mathsf{d}x=0$, comme $(f-g)^2$ est une fonction positive et continue sur $[0,1]$ on a $(f-g)^2=0$ sur $[0,1]$ et donc $f=g$ sur $[0,1]$.