

CONCOURS BLANC DNS 8 « E3A-CCP » PC-PSI

Composition de Mathématiques

Durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Aucun document autorisé ; calculatrice et tout matériel électronique interdits

Durées indicatives :

CORRECTION DU CONCOURS BLANC « CCINP - E3A » PC-PSI

EXERCICE 1

EXERCICE 1 : E3A PC 2021, exercice 3

- 1° On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\frac{1}{\gamma}$.
- 2° Soit (a_n) et b_n définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.
- 2°.1 Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.
- 2°.2 Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n . Laquelle ?
- $$(1) \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}; \quad (2) \frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}; \quad (3) \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$$
- 2°.3 Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n .
- 2°.4 Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.
- 3° On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une unique matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $V_{n+1} = MV_n$.
- 4° Justifier que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
- 5° Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n I_2 + b_n M$.
- 6° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!}$.
Montrer que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M , c'est-à-dire montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que $C_n = \alpha_n I_2 + \beta_n M$ et tels que $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ convergent. On notera alors α et β les limites de ces 2 suites et $C = \alpha I_2 + \beta M$.
- 7° Montrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.
- On admettra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} PM_n P^{-1} = P \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n \right) P^{-1}$.

Correction :

- 1° Les racines de $x^2 - x - 1$ sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, comme $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, la première est négative et la seconde est plus grande que 1, ainsi $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on a bien $\boxed{\gamma > 1}$. De plus $\frac{-1}{\gamma} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ainsi l'autre racine vaut bien $\frac{-1}{\gamma}$.

Alternative : Le discriminant vaut $\sqrt{5}$, ainsi le trinôme possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , les relations coefficients/racines donnent $r_1 r_2 = -1$ (elles sont donc de signe opposé) et $r_1 + r_2 = 1$, en notant γ la racine positive on a avec la première relation que l'autre racine vaut $\frac{-1}{\gamma}$ et avec la deuxième relation que $\gamma - \frac{1}{\gamma} = 1$ et donc $\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma} > 1$.

- 2° 2°.1 Pour $n \geq 1$, on a $a_n = b_{n-1}$, comme $b_{n+1} = a_n + b_n$, on a bien $\boxed{b_{n+1} = b_n + b_{n-1}}$.
- 2°.2 Ainsi (b_n) est une SRL₂ d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$, ainsi (b_n) est combinaison linéaire de γ^n et de $\frac{(-1)^n}{\gamma^n}$, ce qui exclut (2). La valeur $b_0 = 0$ exclut (1), ainsi $\boxed{\text{l'expression de } (b_n) \text{ est donnée par (3)}}$.
- 2°.3 Pour $n \geq 1$, $a_n = b_{n-1} = \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}}$. De plus $b_1 = a_0 + b_0$, ainsi $a_0 = 1$, on a aussi : $\frac{\gamma^{-1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^{-1}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\gamma + \frac{1}{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$. La formule est donc aussi vérifiée pour $n = 0$, on a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}}}$.
- 2°.4 Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + b_n \gamma = \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}} + \left(\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}\right) \gamma = \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)$, d'après le calcul de la question précédente : $\gamma + \frac{1}{\gamma} = \sqrt{5}$, ainsi : $\boxed{a_n + b_n \gamma = \gamma^n}$.

Alternative : La montrer par récurrence sur n (vous aurez sans doute besoin d'utiliser que $\gamma^2 = 1 + \gamma$, ce qui découle de 1°).

- 3° Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{V_{n+1} = M V_n \text{ pour } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

- 4° Déterminons le polynôme caractéristique de M : $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = X(X-1) - 1 = X^2 - X - 1 = (X - \gamma)(X + \frac{1}{\gamma})$, comme il est scindé à racines simples ($\frac{-1}{\gamma} < 0 < 1 < \gamma$) on a que $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$. On

$$a : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\gamma(M) \iff (M - \gamma I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -\gamma x + y = 0 \\ x + (1 - \gamma)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\gamma x + y = 0 \\ (1 + \gamma - \gamma^2)y = 0 \end{cases}$$

$(L_2 \leftarrow \gamma L_2 + L_1)$, comme $1 + \gamma - \gamma^2 = 0$, on en déduit ainsi $\boxed{E_\gamma(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix}\right)}$. De même

$$\boxed{E_{-1/\gamma}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

- 5° Tout d'abord on remarque que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + M$.

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $M^n = a_n I_2 + b_n M$.

— Initialisation : On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$, ainsi $a_0 I_2 + b_0 M = I_2 = M^0$, la propriété est donc initialisée à $n = 0$.

— Hérité : On suppose la propriété pour un certain $n \in \mathbb{N}$, ie on suppose $M^n = a_n I_2 + b_n M$.

On a $M^{n+1} = M^n M = (a_n I_2 + b_n M)M = a_n M + b_n M^2 = a_n M + b_n (I_2 + M) = b_n I_2 + (a_n + b_n)M = a_{n+1} I_2 + b_{n+1} M$. Ainsi la propriété est héréditaire.

On a bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M^n = a_n I_2 + b_n M}$

- 6° Le plus simple serait la méthode de la question suivante, mais on va se laisser guider par les questions et utiliser la question précédente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!}\right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!}\right) M$. Il ne reste plus qu'à injecter les expressions des suites (a_n) et (b_n) .

$$\text{On a : } \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} = \frac{1}{\gamma\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \frac{\gamma^k}{k!} + \frac{\gamma}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1/\gamma)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^\gamma}{\gamma\sqrt{5}} + \frac{\gamma e^{-1/\gamma}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{De même : } \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \frac{\gamma^k}{k!} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1/\gamma)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^\gamma}{\sqrt{5}} - \frac{e^{-1/\gamma}}{\sqrt{5}}.$$

Ce qui montre que : $\boxed{(C_n) \text{ converge vers } \left(\frac{e^\gamma}{\gamma\sqrt{5}} + \frac{\gamma e^{-1/\gamma}}{\sqrt{5}}\right) I_2 + \left(\frac{e^\gamma}{\sqrt{5}} - \frac{e^{-1/\gamma}}{\sqrt{5}}\right) M}$.

- 7° On utilise la question 4°, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -1/\gamma \end{pmatrix}$ ainsi on a $M = P D P^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on

a donc $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P D^k P^{-1} = P \left(\left(\sum_{k=0}^n \frac{\gamma^k}{k!} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1/\gamma)^k}{k!} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) P^{-1}$, en faisant $n \rightarrow +\infty$
on a $C = P \Delta P^{-1}$, ainsi C est bien semblable à Δ .

EXERCICE 2

EXERCICE 2 : E3A PSI 2020, exercice 1

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1° Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

2° Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .

3° Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

4° Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5° Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5°.1 Justifier la convergence de la série de terme général u_n . On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5°.2 Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Correction :

1° Soit $x \geq 1$ fixé, la série $\sum f_n(x)$ est alternée, de plus la suite $(|f_n(x)|)$ est décroissante et tend vers 0, ainsi $\sum f_n(x)$ relève du théorème spécial des séries alternées, d'où la convergence de $\sum f_n(x)$. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur J .

2° Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante sur J et tend vers 0 en $+\infty$, ainsi $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = \frac{1}{\sqrt{1+n}}$, ainsi $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge. On a bien montré que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur J .

3° Soit $x \geq 1$ fixé, le TSA utilisé en 1° donne aussi, pour $n \in \mathbb{N}$, que le reste d'ordre n , $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, vérifie $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2+n}}$, ainsi $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2+n}}$, ce qui montre que $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ainsi $\sum f_n$ converge uniformément sur J .

4° On a $f_0(x) = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et, pour $n \geq 1$, on a $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, de plus on a la convergence uniforme de la série sur J , ainsi, d'après le théorème de la double limite on a $\ell = 1$.

5° 5°.1 La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée qui relève du TSA ($(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est bien décroissante et tend vers 0), elle est donc convergente.

5°.2 Soit $x \in J$, alors $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}\sqrt{\frac{1}{nx}+1}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

on a donc : $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{-1/2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \left(1 - \frac{1}{2nx} + \frac{1}{x} o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{x^{3/2}} \left(-\frac{1}{2n\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$.

Or, si $w_n = -\frac{1}{2n\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ alors $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{3/2}} < 0$ donc $\sum w_n$ converge. On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Toutes les séries étant convergentes, on peut en déduire que : $\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{A}{x^{3/2}}$. Et ainsi, lorsque x

tend vers l'infini : $\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + O_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Alternative : Soit $x \geq 1$, on a : $\varphi(x) - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{x}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right)$.

Pour $n \geq 1$, on a :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| = \left| \frac{\sqrt{nx} - \sqrt{1+nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \right| = \left| \frac{nx - (1+nx)}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{nx})}$$

ainsi $\left| \frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right| \leq \frac{1}{2x\sqrt{nx}\sqrt{n}}$, or $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2}$), ainsi on

a : $\varphi(x) - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{x}}\right) \leq \frac{1}{2x\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Ce qui montre bien que $\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

PROBLÈME 1 : La fonction dilogarithme

PROBLÈME 1 : CCINP PC 2023, exercice 2

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.

On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I – Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]0, +\infty[\times]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times]-\infty, 1], \quad f(t, x) = \frac{t}{e^t - x}.$$

Q1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

Q2. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q3. Soit $x \in]-\infty, 1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t, x)$ et $t \mapsto f(t, 1)$, montrer que $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t, x) dt.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

Q4. Montrer que la fonction L est continue sur $] - \infty, 1]$.

Correction :

Q1. Soit $t > 0$ et $x \leq 1$, on a $e^t > 1$, ainsi $e^t - x > 0$, ce qui montre que f est correctement définie (et est positive).

Q2. La fonction $t \mapsto f(t, 1) = \frac{t}{e^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et y est positive, ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en 0 et $+\infty$.

en 0 : $f(t, 1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$, ainsi la fonction est prolongeable par continuité en 0, ainsi $\int_0^1 f(t, 1) dt$ converge.

en $+\infty$: $t^2 f(t, 1) = \frac{t^3}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^3}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (par cc), ainsi $f(t, 1) = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$, comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge il

en va de même pour $\int_1^{+\infty} f(t, 1) dt$.

Ce qui montre bien l'intégrabilité de $t \mapsto f(t, 1)$ sur $]0, +\infty[$.

Q3. Pour $t > 0$ et $x \leq 1$, on a $e^t - x \geq e^t - 1 > 0$, ainsi $0 \leq f(t, x) < f(t, 1)$, ce qui montre, avec la question précédente, que $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q4. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètres à $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x) dt$, on a :

(i) À $t > 0$ fixé, $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur $] - \infty, 1]$

(ii) À $x \leq 1$ fixé, $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

(iii) Hypothèse de domination. Pour tout $x \leq 1$ et $t > 0$, on a $|f(t, x)| \leq f(t, 1) = \varphi(t)$ (d'après **Q3**) et φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après **Q4**).

Ainsi $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x) dt$ est continue sur $] - \infty, 1]$, ainsi L est continue sur $] - \infty, 1]$.

Partie II – Développement en série entière

Dans cette partie, on considère un nombre réel $x \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad s_n(t) = te^{-(n+1)t} x^n.$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q6. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} s_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x)$$

Q7. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Q8. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L(x^2)$.

Q9. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Correction :

Q5. La fonction s_n est continue sur $]0, +\infty[$, ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en 0 et $+\infty$.

en 0 : $s_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, ainsi l'intégrale est faussement généralisée en 0, donc $\int_0^1 s_n(t) dt$ converge

en $+\infty$: $t^2 s_n(t) = t^3 e^{-(n+1)t} x^n \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (par cc puisque $n+1 > 0$), ainsi $s_n(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$, comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge il en va de même pour } \int_1^{+\infty} s_n(t) dt.$$

Ainsi l'intégrale considérée est convergente.

Procédons au calcul par IPP, pour cela on pose, pour $t > 0$, $u(t) = tx^n$ et $v(t) = \frac{-1}{n+1} e^{-(n+1)t}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, pour $t > 0$ on a $u'(t) = x^n$ et $v'(t) = e^{-(n+1)t}$. De plus $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (par cc), ainsi le crochet converge. On a donc, par IPP, que $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt = \left[tx^n \frac{-1}{n+1} e^{-(n+1)t} \right]_0^{+\infty} -$

$$\int_0^{+\infty} x^n \frac{-1}{n+1} e^{-(n+1)t} dt = \frac{x^n}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{x^n}{n+1} \left[\frac{-e^{-(n+1)t}}{n+1} \right]_0^{+\infty} = \frac{x^n}{(n+1)^2}.$$

On a bien montré :

$$\int_0^{+\infty} s_n(t) dt = \frac{x^n}{(n+1)^2}.$$

Q6. Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $s_n(t) = te^{-t}(e^{-t}x)^n$, comme $t > 0$, on a $e^{-t} \in]0, 1[$, comme $x \in [-1, 1]$, on a $e^{-t}x \in]-1, 1[$, ainsi la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (e^{-t}x)^n$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-e^{-t}x}$. Ce qui montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = te^{-t} \frac{1}{1-e^{-t}x} = \frac{t}{e^t - x}, \text{ on a bien montré que } \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x).$$

Q7. Pour $n > 0$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge.

Appliquons le TITT à la série de fonction $\sum x s_n(t)$, on a :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto x s_n(t)$ est intégrable d'après **Q5**

(ii) La série de fonction $\sum x s_n$ converge simplement vers $t \mapsto x f(t, x)$ d'après **Q6**

(iii) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} |x s_n(t)| dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}$, et on a bien que $\sum a_n$ converge

$$\text{Ainsi } \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x s_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x s_n(t) dt, \text{ avec les questions précédentes on a donc } \int_0^{+\infty} x f(t, x) dt =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, \text{ en faisant la réindexation } n' = n+1 : \quad L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Q8. Pour $x \in [-1, 1]$, on a $-x \in [-1, 1]$ et ainsi : $L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} x^n$, or pour $n \geq 1$, on a

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}. \text{ Ainsi } L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^2} x^{2p}, \text{ d'où } \quad L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L(x^2).$$

Q9. On a $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, ainsi $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$. D'après la question précédente $L(1) + L(-1) = \frac{1}{2} L(1)$, ainsi $L(-1) =$

$$\frac{-1}{2} L(1), \text{ ie } \quad L(-1) = \frac{-\pi^2}{12}.$$

Partie III – Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x) \ln(1-x).$$

Q10. On admet que la fonction L est dérivable et, pour $x \in]-1, 1[$, qu'on a : $L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$. Montrer que l'on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$.

Q11. Montrer que la fonction h est constante sur $]0, 1[$.

Q12. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0, 1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt$.

Correction :

Q10. Pour tout $x \in]-1, 1[$, avec $x \neq 0$, on a $L'(x) = x^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, or d'après l'énoncé, comme $-x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ ainsi } \boxed{\text{pour } x \neq 0, L'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}}. \text{ De plus on a } L'(0) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{0^{n-1}}{n} = 1, \text{ ce qui montre bien que } \boxed{L'(0) = 1}.$$

Remarque : La fonction L est développable en série entière sur $[-1, 1]$ donc de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et on peut dériver terme à terme dessus, ainsi pour $x \in]-1, 1[$, on a $L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

La formule avec $\ln$ donnée n'est rien d'autre que le développement en série entière de $\ln$.

Q11. La fonction h est dérivable sur $]0, 1[$ et, pour $x \in]0, 1[$, on a $h'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x} - \frac{-\ln(x)}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$, ainsi $\boxed{h \text{ est constante sur }]0, 1[}$.

Q12. On a $\ln(x) \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ (par cc), de plus L est continue en 0 et en 1 (d'après **Q4**), ainsi h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = L(0) + L(1) + 0$, comme h est constante sur $]0, 1[$ et continue en 0, on en déduit, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0, 1[, \text{ que } h(x) = L(1)}$ (on a utilisé $L(0) = 0$).

$$\text{On a } L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - \frac{1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt.$$

$$\text{De plus } L(1) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 2L\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\right), \text{ Ainsi } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt = L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - (\ln(2))^2 \right)}.$$

PROBLÈME 2 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

PROBLÈME 2 : CCINP PC 2019, exercice 1

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

Q1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Q2. Montrer que l'application $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

Q4. Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Correction :

Q1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale n'est donc généralisée qu'en $+\infty$, de plus PQ est un polynôme, et si $PQ \neq 0$, notons d son degré et a_d son coefficient dominant, ainsi $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_d t^d e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (par croissance comparée), comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale converge, ce qui aussi vrai si $PQ = 0$. Ainsi l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Q2. L'application est :

- Symétrique : pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on a bien (par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$) : $(P|Q) = (Q|P)$
- Bilinéaire : pour $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a (on utilise la linéarité des intégrales généralisées convergentes) : $(P + \lambda Q|R) = \int_0^{+\infty} (P(t) + \lambda Q(t))R(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t} dt + \lambda \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t} dt = (P|R) + \lambda(Q|R)$, ainsi l'application est linéaire en sa première variable, comme elle est symétrique, elle est linéaire en sa deuxième variable. Elle est donc bilinéaire.
- Définie positive : pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a pour tout $t \geq 0$, $P^2(t)e^{-t} \geq 0$, ainsi $(P|P) \geq 0$, de plus si $(P|P) = 0$ on est en présence de l'intégrale d'une fonction continue et positive qui est nulle, ainsi pour tout $t \geq 0$, $P^2(t)e^{-t} = 0$, donc P est nul sur $\mathbb{R}_+$, ainsi P possède une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul, ie $P = 0$.

On a montré que l'application $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive, dit autrement $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q3. Posons, pour $t \geq 0$, $u(t) = t^k$ et $v(t) = -e^{-t}$, ainsi u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, pour $t \geq 0$, on a $u'(t) = kt^{k-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$. De plus uv converge vers 0 en $+\infty$, ainsi on peut procéder à une intégration par parties et on a : $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \left[-kt^{k-1}e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t} dt$, ie $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$.

Q4. On vient de montrer à la question précédente : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(X^k|1) = k(X^{k-1}|1)$. Montrons, par récurrence (finie) sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, que $(X^k|1) = k!$.

Initialisation : On a $(1|1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$, la propriété est donc vérifiée pour $k = 0$.

Hérédité : Supposons que $(X^k|1) = k!$ pour un certain $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, d'après la question précédente $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$, ainsi par hypothèse de récurrence $(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)!$, la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

On a bien montré que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Q7. En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

Q9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10. Justifier que P_k est de degré k .

Q11. Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q12. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$.

Q13. En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

Q14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Correction :

Q5. Par linéarité de la dérivation, α est bien une application linéaire (éventuellement le rédiger complètement). De plus si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(P) \leq n$, ainsi $\deg P' \leq n-1$ (donc $\deg(1-X)P' \leq n$) et $\deg P'' \leq n-2$ (ainsi $\deg XP'' \leq n-1$), on en déduit que $\deg \alpha(P) \leq n$, donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi α est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. On a $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + (1-X)kX^{k-1} =$

$$-kX^k + k^2X^{k-1}. \text{ On en déduit donc que : } \text{Mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

Q7. La matrice de α est donc triangulaire supérieure, ses valeurs propres se lisent donc sur sa diagonale, on a donc $\text{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. Ainsi $\chi_\alpha(X) = X(X+1)\dots(X+n)$ est scindé à racines simples, α est donc diagonalisable (ou juste dire que α possède $n+1$ racines distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$).

Q8. $-k$ est racine simple de χ_α donc l'espace propre associé est de dimension 1, ie $\dim(\ker(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$.

Q9. Soit $Q_k \in E_{-k}(\alpha)$ avec $Q_k \neq 0$, posons $d = \deg(Q_k)$ et notons a_d son coefficient dominant, on a $a_d \neq 0$ (sinon ne serait pas de degré d) et posons $P_k = \frac{1}{a_d}Q_k$, comme $E_{-k}(\alpha)$ est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$ on a $P_k \in E_{-k}$, ie $\alpha(P_k) = -kP_k$. On a montré l'existence, reste l'unicité. On remarquera que comme $E_{-k}(\alpha)$ est de dimension 1 alors $E_{-k}(\alpha) = \text{Vect}(P_k)$. Soit R_k un autre polynôme unitaire vérifiant $\alpha(R_k) = -kR_k$, ainsi $R_k \in E_{-k}(\alpha)$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = \lambda P_k$. Comme ces deux polynômes sont unitaires on a $\lambda = 1$ et donc $R_k = P_k$, d'où l'unicité.

Q10. Tout d'abord remarquons que $\alpha(1) = 0$ et ainsi (par unicité) $P_0 = 1$. Supposons $k \geq 1$, notons $d = \deg(P_k)$, ie $P_k = X^d + R_k$ avec $\deg(R_k) \leq d-1$, on a $\alpha(X^d) = -dX^d + d^2X^{d-1}$ et que $\deg(\alpha(R_k)) \leq d-1$ (c'est **Q5** en prenant d à la place de n), ainsi $\deg(\alpha(P_k)) = d$ et son coefficient dominant est $-d$, alors $\alpha(P_k) = -kP_k$ donc P_k admet $-k$ comme coefficient dominant, ainsi $k = d$ ie P_k est de degré k .

Q11. On a déjà montré que $P_0 = 1$, on remarque que $\alpha(X-1) = \alpha(X) - 0 = 1 - X$ ainsi (par unicité) $P_1 = X - 1$. Comme $\alpha(X^2) = -2X^2 + 4X$ On a $\alpha(X^2 - 4X + 2) = -2X^2 + 4X - 4(1 - X) = -2(X^2 - 4X + 2)$, ainsi (toujours l'unicité) $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

Q12. On a $(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt$. Posons, pour $t \geq 0$: $u(t) = tP'(t)e^{-t}$ et $v(t) = Q(t)$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, pour $t \geq 0$, on a $u'(t) = (P'(t) + tP''(t))e^{-t} - tP'(t)e^{-t} = \alpha(P)(t)e^{-t}$ et $v'(t) = Q'(t)$, de plus le crochet $[uv]$ tend vers 0 en $+\infty$, ainsi par intégration par parties $(\alpha(P)|Q) = \left[tP'(t)Q(t)e^{-t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$, ie $(\alpha(P)|Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.

Q13. On a, par symétrie du produit scalaire et par la question précédente, que $(P|\alpha(Q)) = (\alpha(Q)|P) = - \int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}dt$. Ainsi $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

Q14. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, d'après **Q13**, $(\alpha(P_k)|P_\ell) = (P_k|\alpha(P_\ell))$, en appliquant **Q9** et la bilinéarité du produit scalaire on en déduit que : $-k(P_k|P_\ell) = -\ell(P_k|P_\ell)$. Ainsi si $k \neq \ell$ on a $(P_k|P_\ell) = 0$, ainsi la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale, de plus elle est constituée de vecteurs unitaires (donc tous non nuls, c'est donc une famille libre), comme il y en a $n+1$ et que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, on a bien que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

Q15. Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q16. En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.

Q17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

Correction :

Q15. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, On considère :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k. \quad (**)$$

Comme $(**)$ est un cas particulier de $(*)$ on a $(*) \implies (**)$, de plus si $(**)$ est vérifiée, comme pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, et la linéarité de l'intégrale (qui sont toutes convergentes) permet d'avoir $(*)$.

On a donc montré $(*) \iff (**)$ (alternative pour cette démo : nommer $\varphi(P)$ et $\psi(P)$ chacun des membres de $(*)$ et utiliser que deux endomorphismes sont égaux ssi ils coïncident sur une base). Ainsi $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si (en utilisant **Q4** : $\forall k, \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$) : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k!$. Ce qui matriciellement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Ce qui est bien l'équivalence demandée.

Q16. La matrice de la question précédente est une matrice de Vandermonde, comme $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille d'éléments 2 à 2 distincts cette matrice de Vandermonde est inversible, ce qui montre l'existence et l'unicité d'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.

Q17. On considère $P = P_n^2$, comme les x_i sont les racines de P_n , on en déduit $\sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) = 0$, or

$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq 0$ (si cette intégrale d'une fonction continue et positive était nulle on aurait $P_n = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $P_n = 0$, ce qui n'est pas le cas puisque P_n est unitaire de degré n), on a donc,

$$\text{pour } P = P_n^2 : \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

FIN DE L'ÉNONCÉ