

DNS 7^{1/2} : pour le vendredi 6 février

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 (E3A PSI 2015, *exercice 3*).

On pose, lorsque cela est possible : $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$.

1° Déterminer l'ensemble de définition I de f .

2° En justifiant son existence, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

3° Calculer $f(1)$. On pourra utiliser l'application $\varphi : u > 0 \mapsto \text{ch}(u)$.

4° Calculer $f(2)$. On pourra remarquer que la dérivée de $x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ est égale à $x \mapsto \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$.

5° Vérifier que f est positive sur I .

6° Montrer que f est décroissante sur I .

7° Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et préciser l'expression de $f'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

8° Soit $x \in I$. Démontrer la relation : $f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$.

On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.

9° Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.

10° Pour tout réel $x > 0$, on pose : $\phi(x) = xf(x)f(x+1)$.

Prouver que $\phi(x+1) = \phi(x)$. Calculer $\phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11° En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

12° Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$. En déduire que : $f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\underset{n \in \mathbb{N}^*}{\sim}} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

13° En utilisant des parties entières, prouver que : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

14° Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

15° Prouver que la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction :

1° Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $f_x : t \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$, cette fonction est continue sur $]1, +\infty[$, l'intégrale n'est donc généralisée qu'en 1 et $+\infty$.

— Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$, il y a donc convergence de l'intégrale en $+\infty$ ssi $x > 0$ (par comparaison avec une intégrale de Riemann).

— Au voisinage de 1^+ , $f_x(t) \underset{t \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ (on a utilisé $\sqrt{t^2 - 1} = \sqrt{(t+1)(t-1)}$) est intégrable.

Comme f_x est positive, la convergence absolue (ie l'intégrabilité) est équivalente à l'existence de l'intégrale. Ainsi $I = \mathbb{R}_+^*$.

2° La fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est équivalente en $+\infty$ à $x \mapsto e^{-x}$, elle est donc intégrable au voisinage de $+\infty$. On a : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = [\text{Arctan}(e^x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

3° La fonction $u \mapsto \text{ch}(u)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, le changement de variable $t = \text{ch}(u)$ est donc licite pour calculer $f(1)$. On a : $f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(u)}{\text{ch}(u)\sqrt{\text{ch}^2(u) - 1}} du = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{e^u + e^{-u}} = \frac{\pi}{2}$.

4° Le même changement de variable donne : $f(2) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{ch}^2(u)} = \left[\frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} \right]_0^{+\infty} = 1$. (pour la limite en $+\infty$ on a utilisé $\operatorname{ch}(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^u}{2}$ et $\operatorname{sh}(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^u}{2}$).

5° On intègre une fonction positive entre deux bornes "bien ordonnées", ainsi f est positive sur I .

6° Posons $g : (x, t) \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$, à $t > 1$ fixé la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est décroissante, ainsi si $x \leq y$ alors $g(x, t) \geq g(y, t)$, il ne reste plus qu'à intégrer cette inégalité par rapport à t sur $]1, +\infty[$ pour avoir $f(x) \geq f(y)$. Ce qui montre que f est croissante sur I .

7° On va utiliser le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres. On a :

— $\forall x \in I, t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]1, +\infty[$.

— $\forall t > 1, x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , de plus pour $(x, t) \in I \times]1, +\infty[$ on a : $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$.

— $\forall x \in I, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]1, +\infty[$.

— Hypothèse de domination : $\forall x \in [a, b] \subset I, \forall t > 1, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{\ln(t)}{t^a \sqrt{t^2 - 1}} = \varphi(t)$. La fonction de domination est continue sur $]1, +\infty[$, de plus on a :

— En 1^+ : On a $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{\ln(1 + (t - 1))}{\sqrt{t - 1} \sqrt{t + 1}} \underset{t \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{\sqrt{t - 1}}{\sqrt{2}}$, ainsi φ est prolongeable par continuité en 1, ainsi φ est intégrable en 1^+ .

— En $+\infty$: On a $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{x+1}} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^{x/2+1}} \right)$. Comme $x/2 + 1 > 1$ on a que φ est intégrable en $+\infty$.

ainsi φ est intégrable sur $]1, +\infty[$.

On peut donc appliquer le théorème et en déduire que $f \in \mathcal{C}^1(I)$, on a aussi montré que : $\forall x > 0, f'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{-\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}} dt$. Ce qui montre que f' est négative (intégrale d'une fonction négative avec des bornes bien ordonnées) et donc que f est décroissante sur I .

8° Soit $x \in I$ fixé, les fonctions $u : t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, de plus on a : $u' : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}$ et $v' : t \mapsto \frac{-(x+1)}{t^{x+2}}$. De plus uv est de limite nulle en 1 et en $+\infty$ (convergence du crochet). On peut

donc procéder à une intégration par parties (les deux intégrales existent). On a : $f(x) = (x+1) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^{x+2}} dt$.

Or pour $t > 1$ on a : $\sqrt{t^2 - 1} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$, comme toutes les intégrales existent, on peut couper la somme et obtenir : $f(x) = (x+1)(f(x) - f(x+2))$. On en déduit donc que $f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$.

9° Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $f(2p) = \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}$.

— Initialisation : Comme $f(2) = 1$ le résultat est bien initialisé.

— Hérédité : soit $p \geq 2$ tel que le résultat soit vrai au rang p . D'après la question précédente $f(2p+2) = \frac{2p}{2p+1} f(2p) \stackrel{(\text{HR})}{=} \frac{2p}{2p+1} \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} = \frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}$. Ce qui est bien la formule voulue, ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

10° Soit $x > 0$. On a $\phi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \phi(x)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\phi(n) = \phi(1) = \frac{\pi}{2}$.

11° Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ϕ l'est aussi, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x+1) = \phi(1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$ on en déduit que

$$\phi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2}, \text{ ie. } xf(x)f(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2}, \text{ ie. } (f(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}) f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

12° En utilisant la dernière conclusion de 10° et la définition de ϕ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$.

Comme f est décroissante et positive on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1)^2 \leq f(n)f(n+1) \leq f(n)^2$, ainsi en utilisant ces inégalités à $n \geq 2$ et à $n-1$ on en déduit que $\frac{\pi}{2n} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2(n-1)}$, ie que $1 \leq \frac{f(n)^2}{\pi/(2n)} \leq \frac{2n}{2(n-1)}$, ce qui montre

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{\sqrt{\pi/(2n)}} = 1, \text{ ce qui permet d'en déduire que : } f(n) \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

13° La fonction f étant décroissante, on a, pour tout $x \geq 2$, que $f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor)$. Il ne reste plus qu'à

utiliser que $\lfloor x \rfloor$ est équivalent à x en $+\infty$ (car $x-1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$) pour avoir que $f(\lfloor x \rfloor) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ $\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(\lfloor x \rfloor + 1)$.

1). Ce qui montre bien que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

14° On a décroissance de f . La courbe aux voisinage de 0 et de $+\infty$ est proche de celle des fonctions équivalentes trouvées.

15° D'après ce qui précède $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \frac{\pi}{2}$, or ϕ est 1-périodique d'après 10°, ainsi elle est constante. En effet pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\phi(x) = \phi(x+n)$, en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $\phi(x) = \frac{\pi}{2}$, comme x est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit que : $\forall x > 0, \phi(x) = \frac{\pi}{2}$.