

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *Le problème des moments (parties IV et V, MINES PSI 2019, maths 2).*

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t) dt,$$

où φ est définie en (??).

1. Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $\hat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

3. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.
4. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

Correction :

1. Utilisons le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Posons pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$: $\phi(\xi, t) = e^{it\xi} \varphi(t)$.
On a :
 - (i) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto \phi(\xi, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
 - (ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $\xi \mapsto \phi(\xi, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
 - (iii) Hypothèse de domination : pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$, $|\phi(\xi, t)| \leq \varphi(t)$. De plus φ est bien continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est une densité).

On en déduit donc que $\hat{\varphi}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Utilisons le théorème de dérivation C^1 des intégrales à paramètre. Posons pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$: $\phi(\xi, t) = e^{it\xi} \varphi(t)$.
On a :
 - (i) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto \phi(\xi, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$.
 - (ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $\xi \mapsto \phi(\xi, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus pour $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial \xi} = ite^{it\xi} \varphi(t)$.
 - (iii) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial \xi}$ est continue (par morceaux) $\mathbb{R}$.
 - (iv) Hypothèse de domination : pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$, $\left| \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial \xi} \right| \leq t\varphi(t)$. De plus $t \mapsto t\varphi(t)$ est bien continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (existence d'un moment d'ordre 1 montré à la question 2.).

On en déduit donc que $\hat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$: $\hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Posons $u : t \mapsto e^{it\xi}$ et $v : t \mapsto -e^{-t^2/2}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et uv converge vers 0 en $\pm\infty$.
Ainsi par IPP on a : $\hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-e^{it\xi} e^{-t^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = -\xi \hat{\varphi}(\xi)$.
Ainsi $\hat{\varphi}$ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' + \xi y = 0$.
4. Comme $\xi \mapsto \frac{\xi^2}{2}$ est une primitive de $\xi \mapsto \xi$ on en déduit donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(x) = \lambda e^{-\xi^2/2}$.
Comme $\hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$ (car φ est une densité) on en déduit que $\lambda = 1$ et donc : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(x) = e^{-\xi^2/2}$.

V – Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

5. Montrer que f est bien une densité sur $[0, +\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x)) dx.$$

6. Montrer que :

$$I_n = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right),$$

où $\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z .

7. À l'aide de la partie IV, en déduire que $I_n = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

8. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0, +\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

5. La fonction f est bien positive, de plus pour $x > 0$, on a $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2(1 - \frac{2}{\ln(x)})} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0$, ainsi f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}^+$.

On a $x^2 f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2(1 + \frac{2}{\ln(x)})} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0$, donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$, qui n'est généralisée qu'en $+\infty$ est convergente.

Procédons au changement de variable $u = e^x$ (ie $x = \ln(u)$) qui est bien une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, il est donc licite. De plus on a $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du = 1$. Ce qui montre bien que f est une densité de probabilité.

Remarque : Le changement de variable montre aussi la convergence.

6. L'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ converge (ce n'est rien d'autre que $\hat{\varphi}(2\pi - in)$ dont on a montré l'existence en question 15.).

$$\text{On a } \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \left(e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} \right) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u) e^{nu} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

On procède au changement de variable $x = e^u$ qui est licite (cf question 19.) et on obtient :

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(2\pi \ln(x)) x^n e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} \frac{1}{x} dx = \int_0^{+\infty} \sin(2\pi \ln(x)) x^n f(x) dx = I_n.$$

$$\text{Ce qui montre bien } I_n = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right).$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \operatorname{Im}(\hat{\varphi}(2\pi - in))$ et d'après la question 18., pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, $\hat{\varphi}(x) = e^{-\xi^2/2}$. On a donc $I_n = \operatorname{Im}(e^{-(2\pi - in)^2/2}) = e^{-(4\pi^2 - n^2)/2} \operatorname{Im}(e^{2i\pi n}) = 0$.

8. Pour $\alpha \in [-1, 1]$, on a bien g_α positive et continue. De plus $|g_\alpha| \leq 2|f|$ et comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en va de même pour g_α . De plus $\int_0^{+\infty} g_\alpha(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx + I_0 = 1$ (puisque f est une densité et $I_0 = 0$ d'après la question précédente).

Ainsi, pour tout $\alpha \in [-1, 1]$, g_α est une densité. De plus (même argument que juste avant), pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $m_n(g_\alpha) = m_n(f) + \alpha I_n = m_n(f)$.

Ainsi pour tout $\alpha \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, g_α et f sont deux densités distinctes qui admettent les mêmes moments à tout ordre. Comme $[-1, 1] \setminus \{0\}$ n'est pas dénombrable (car contient $]0, 1[$ qui est en bijection avec $\mathbb{R}$, par exemple avec $t \mapsto \tan(\pi t - \pi/2)$) on a bien une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0, +\infty[$, distinctes et telles que $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.