

Correction du CONCOURS BLANC « E3A-CCINP » PC-PSI

EXERCICE 1 : CCINP PC 2022, exercice 3

Partie I – Construction de la constante d'Euler

Correction :

Q1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a $\Delta_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(\frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$. Ainsi $a = \frac{1}{2}$.

Q2. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$), d'après la règle des équivalents (comme $\frac{-1}{n^2} < 0$, donc de signe constant), on a $\sum \Delta_n$ converge absolument donc converge.

Q3. On vient de montrer que la série $\sum u_n - u_{n-1}$ converge, or c'est une série télescopique, ainsi la suite (u_n) converge.

Remarque : Si on veut détailler, il suffit d'écrire, pour $n \geq 2$, $\Delta_n = u_n - u_1$ pour avoir le résultat (et comme $u_1 = 1$, que la limite de (u_n) n'est rien d'autre que 1 plus la somme de la série $\sum \Delta_n$).

Partie II – Expression intégrale de la constante d'Euler

Correction :

Q4. Soit $t > 0$, posons $n_0 = [t] + 1$, ainsi $n_0 > t$. Ainsi pour tout $n \geq n_0$ on a $n > t$ et donc $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$.

Q5. Soit $t > 0$, et soit $n_0 = [t] + 1$, ainsi pour $n \geq n_0$ on a (puisque $\frac{t}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) : $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} \ln(t) = e^{n \left(-\frac{t}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \ln(t) = e^{-t + o_{n \rightarrow +\infty}(1)} \ln(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t} \ln(t) = f(t)$. Ce qui montre bien la convergence simple de (f_n) vers f .

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, si $n \leq t$, on a bien $|f_n(t)| = 0 \leq e^{-t} |\ln(t)|$, si $n > t$, on a (puisque $\frac{-t}{n} > -1$) : $|f_n(t)| = \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) \right| = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} |\ln(t)| \leq e^{n \frac{-t}{n}} |\ln(t)| = e^{-t} |\ln(t)|$. On a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, |f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$.

Q7. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t} |\ln(t)|$ est continue sur $]0, +\infty[$.

— En 0 : On a $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t)$, comme la fonction $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$, il en va de même pour φ .

— En $+\infty$: On a $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, il en va de même pour φ .

En conclusion, la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q8. Pour $n \geq 1$, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t} |\ln(t)|$ domine (d'après Q6) la fonction f_n , de plus (d'après Q7), la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, il en va donc de même pour f_n , ainsi l'intégrale I_n est convergente.

Q9. Appliquons le théorème de convergence dominée, on a :

— La suite (f_n) converge simplement (d'après Q5) sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto e^{-t} \ln(t)$.

— Toutes les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.

— Hypothèse de domination : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)| = \varphi(t)$ (d'après Q6) et φ est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après Q7.

Ainsi le théorème de convergence dominée s'applique, on a non seulement que toutes les fonctions f_n et f sont intégrables sur $]0, +\infty[$ (montrés aux questions précédentes), mais surtout que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt =$

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt, \text{ ie } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt}.$$

Q10. Procédons par intégration par parties, pour $u \in [0, 1[$, posons $f(u) = \frac{u^{n+1}-1}{n+1}$ et $g(u) = \ln(1-u)$, les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$, et pour $u \in [0, 1[$, $f'(u) = u^n$ et $g'(u) = \frac{-1}{1-u} = \frac{1}{u-1}$. Or, en posant $u = 1+t$, on a $u^{n+1} - 1 = (1+t)^{n+1} - 1 = 1 + (n+1)t + \frac{t^2}{2}(n+1)(n+2) + \dots$. Ainsi $f(u)g(u) \underset{u \rightarrow 1}{\sim} -(1-u) \ln(1-u) \xrightarrow{u \rightarrow 1} 0$ (par croissance comparée). Ainsi le crochet $\left[f(u)g(u) \right]_0^1$ converge (pas de problème en 0 puisque $f(0)g(0) = 0$).

Ainsi, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^1 f'(u)g(u) du$ et $\int_0^1 f(u)g'(u) du$ sont de même nature, or $\int_0^1 f(u)g'(u) du$ et $\int_0^1 (n+1)f(u)g'(u) du$ sont de même nature. Ainsi l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1} du$ est convergente.

Cette dernière intégrale est faussement généralisée puisque $\mapsto \frac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est continue sur $[0, 1[$, et qu'on a $\frac{u^{n+1}-1}{u-1} \xrightarrow{u \rightarrow 1} (n+1)$, ainsi elle converge, donc l'intégrale J_n converge, et la formule d'intégration par parties

donne : $J_n = \left[f(u)g(u) \right]_0^1 - \int_0^1 f(u)g'(u) du$, ainsi $J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1} du$.

Or pour tout u on a $u^{n+1} - 1 = (u-1) \sum_{k=0}^n u^k$. Ainsi par linéarité de l'intégrale (somme finie d'intégrales propres) on a : $J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \sum_{k=0}^n u^k du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_0^1 u^k du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$. On a bien montré

(après réindexation) : $J_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

Q11. Procédons au changement de variable $t = n(1-u)$, affine donc licite (bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $[0, n]$) : $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt = \int_1^0 u^n \ln(n(1-u))(-n) du = n \int_0^1 u^n (\ln(n) + \ln(1-u)) du = n \ln(n) \int_0^1 u^n du + n J_n = \frac{n \ln(n)}{n+1} + n J_n$. Ce qui montre bien que :

$$\boxed{I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + n J_n}.$$

Q12. Pour $n \geq 2$, on en déduit donc (en utilisant la question Q10) que : $I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) - \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} =$

$\frac{-n}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{-n}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + u_n \right)$. Ainsi $u_n = -\frac{n+1}{n} I_n - \frac{1}{n+1}$, comme (u_n) converge vers γ , $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ converge vers 1, $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ vers 0, et en utilisant Q9, on en déduit donc que

$$\boxed{\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt}.$$

EXERCICE 2 : CCP PSI 2020, Partie 1

Correction :

Q1. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $|\sin'| = |\cos| \leq 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, que $|\sin(x) - \sin(0)| \leq 1|x - 0|$, ainsi : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, |\sin(t)| \leq t}$.

Alternative : le résultat est clairement vrai pour $t \geq 1$, pour $t \in [0, 1]$, comme le sinus est positif sur cet intervalle, on peut étudier $\varphi : t \mapsto \sin(t) - t$ (φ est dérivable et $\varphi' = \cos(t) - 1 \leq 0$ donc φ est décroissante, comme $\varphi(0) = 0$, φ est négative).

Q2. Pour $x > 0$ et $t > 0$ on pose $f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$, $g(x, t) = e^{-tx} \sin(t)$ et $h(x, t) = e^{-tx} \cos(t)$. Soit $x > 0$ fixé, $t \mapsto f(x, t)$, $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto h(x, t)$ sont continues sur $]0, +\infty[$, donc les trois intégrales ne sont généralisées qu'en 0 et $+\infty$.

— En 0 les trois fonctions sont prolongeables par continuité ($f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} e^{-tx} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$, $g(x, 0) = 0$ et $h(x, 0) = 1$) donc les intégrales sont faussement généralisées en 0.

— En $+\infty$, par croissance comparée on a $t^2 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x, t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (idem pour g et h), comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge il en va de même pour $\int_1^{+\infty} f(x, t) dt$ (idem avec g et h).

Ainsi F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Alternative : Soit $x > 0$ fixé, on peut utiliser la question précédente pour montrer pour tout $t > 0$ que $|f(x, t)| \leq e^{-tx}$, comme on a aussi $|g(x, t)| \leq e^{-tx}$ et $|h(x, t)| \leq e^{-tx}$, comme $t \mapsto f(x, t)$, $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto h(x, t)$ sont continues sur $]0, +\infty[$, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$ converge, ce qui est le cas car $x > 0$ (intégrale de référence).

Q3. D'après la question Q1, pour $x > 0$ et $t > 0$ on a $|f(x, t)| \leq e^{-tx}$, on intègre l'inégalité pour t entre 0 et $+\infty$ (les intégrales convergent d'après la question précédente) : $\int_0^{+\infty} |f(x, t)| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$, or $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[\frac{e^{-tx}}{-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Comme $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(x, t)| dt$, on a $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$, ainsi, par théorème de comparaison, on a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Alternative : on peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continue en se fixant $x \geq 1$ au départ.

Q4. Utilisons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. On a bien :

— Pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et y est intégrable (d'après Q2).

— Pour $t \in]0, +\infty[$ fixé, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour $x > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) e^{-tx}$.

— Pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

— Hypothèse de domination, soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ (ie $0 < a < b$), pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-ta} = \varphi_{a,b}(t)$, où on a posé $\varphi_{a,b}(t) = e^{-ta}$. La fonction $\varphi_{a,b}$ est bien positive, continue par morceaux et intégrable (comme intégrale de référence) sur $]0, +\infty[$.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment donc sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier et, pour $x > 0$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = -G(x)$. On a bien montré F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F' = -G$.

Q5. Pour $x > 0$, $H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt + i \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} (\cos(t) + i \sin(t)) dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{it} dt = \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt = \left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$, où on a utilisé $\left| \frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Il suffit de prendre la partie imaginaire et réelle pour avoir : $\forall x > 0, G(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $H(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Soit $\alpha > 0$, dans $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$ procédons au changement de variable $\alpha t = u$ qui est affine donc licite (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u \frac{x}{\alpha}} \cos(u) \frac{1}{\alpha} du$ sont de même nature et égales si elles convergent, or la seconde n'est rien d'autre que

$\frac{1}{\alpha} H\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Or $\frac{1}{\alpha} H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{x/\alpha}{x^2/\alpha^2+1} = \frac{x}{x^2+\alpha^2}$. On a donc montré que : $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt = \frac{x}{x^2+\alpha^2}$

Q6. D'après Q4 et Q5 on a, pour tout $x > 0$, que $F'(x) = -G(x) = \frac{-1}{x^2+1}$, ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = -\arctan + C$, on prend la limite en $+\infty$ pour obtenir (d'après Q3) : $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, ie $C = \frac{\pi}{2}$. On a donc

$F = \frac{\pi}{2} - \arctan$, ainsi $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 3 : E3A PC 2020, exercice 5

Correction :

Q1. Tout d'abord $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien une application de E dans $\mathbb{R}$, vérifions que c'est un produit scalaire.

- Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien symétrique.
- Pour $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle P + \lambda Q | R \rangle = (P(1) + \lambda Q(1))R(1) + (P'(1) + \lambda Q'(1))R'(1) + (P''(1) + \lambda Q''(1))R''(1) = P(1)R(1) + P'(1)R'(1) + P''(1)R''(1) + \lambda(Q(1)R(1) + Q'(1)R'(1) + Q''(1)R''(1)) = \langle P | Q \rangle + \lambda \langle Q | R \rangle$, ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien linéaire en sa première variable et donc, par symétrie, est bilinéaire.
- Pour $P \in E$, $\langle P | P \rangle = P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 \geq 0$, ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien positif.
- Soit $P \in E$ tel que $\langle P | P \rangle = 0$, ie $P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 = 0$, ainsi $P(1)^2 = P'(1)^2 = P''(1)^2 = 0$, ie $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, donc 1 est racine de multiplicité au moins 3 de P , comme $\deg(P) \leq 2$, on a donc $P = 0$, ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est définie.

Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E , ie $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Q2. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$ de E .

- Posons $L_0 = \frac{1}{\|1\|} 1 = 1$.
- Posons $\tilde{L}_1 = X - \langle X | 1 \rangle 1 = X - 1$, comme $\|X - 1\| = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1$, on pose $L_1 = X - 1$.
- Posons $\tilde{L}_2 = X^2 - \langle X^2 | X - 1 \rangle (X - 1) - \langle X^2 | 1 \rangle 1$. Comme $\langle x^2 | X - 1 \rangle = 0 + 2 + 0 = 2$, $\langle X^2 | 1 \rangle = 1 + 0 + 0 = 1$, on a donc $\tilde{L}_2 = X^2 - 2(X - 1) - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, comme $\langle (X - 1)^2 | (X - 1)^2 \rangle = 0 + 0 + 4 = 4$, on pose donc $L_2 = \frac{1}{2}(X - 1)^2$.

Ainsi $(1, X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2)$ est une base orthonormée pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Q3. Comme $(1, X - 1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, on en déduit que la projeté orthogonale de $P \in E$ sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $p_1(P) = \langle P | 1 \rangle 1 + \langle P | X - 1 \rangle (X - 1)$, ainsi $p_1(X^2 - 4) = -3 + 2(X - 1) = 2X - 5$. Or on sait que $d(X^2 - 4, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - 4 - p_1(X^2 - 4)\| = \|X^2 - 2X + 1\| = \|(X - 1)^2\| = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2$. Ce qui montre que $d(X^2 - 4, \mathbb{R}_1[X]) = 2$.

Q4. Q4.1 Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie pour $P \in E$, par $\varphi(P) = P(1)$, φ est bien linéaire sur E (pour $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$) et comme $H = \text{Ker}(\varphi)$ on a bien que H est un sous-espace vectoriel de E . De plus $\varphi(1) = 1 \neq 0$, on a $\text{rg}(\varphi) \geq 1$ et comme φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a $\text{rg}(\varphi) \leq 1$, d'où $\text{rg}(\varphi) = 1$, ainsi d'après le théorème du rang, H est de dimension 2 (ie c'est un hyperplan de E).

Q4.2 La famille $(X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2)$ est une famille orthonormale (donc libre puisque les éléments sont non nuls) de deux éléments de H qui est donc une base orthonormale de H , de plus comme 1 est orthogonal aux deux vecteurs de cette base de H on a donc $H^\perp = \text{Vect}(1)$.

Notons p_H (resp $p_{H^\perp}$) la projection orthogonale sur H (resp. $H^\perp$), pour $P \in E$, on a $p_H(P) = P - p_{H^\perp}(P)$, or $p_{H^\perp}(P) = \langle P | 1 \rangle 1$. Comme $p_{H^\perp}(1) = 1$, on a $p_H(1) = 0$, comme $p_{H^\perp}(X) = 1$, on a $p_H(X) = X - 1$, comme $p_{H^\perp}(X^2) = 1$, on a $p_H(X^2) = X^2 - 1$.

Ainsi $\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(p_H) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4 : CCINP PC 2022, exercice 1

Partie I – Généralités sur l'application φ

Correction :

Q1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B ainsi $\varphi(P)$ est un polynôme et $\deg(\varphi(P)) < \deg(B) = n + 1$, ce qui montre bien $\deg(\varphi(P)) \leq n$ et donc que $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

Q2. On a : $A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda P_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$. De plus $\deg(R_1 + \lambda R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$. Ainsi, par unicité dans le théorème de la division euclidienne, $Q_1 + \lambda Q_2$ est le quotient de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ et $R_1 + \lambda R_2$ le reste, ainsi $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2)$. Ce qui montre la linéarité de φ , comme on a montré à la question précédente que c'était une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même, on a bien montré que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II – Étude d'un premier exemple

Correction :

Q3. On a $A = X^2 + 2X = 0.B + X^2 + 2X$, ainsi $\varphi(1) = 2X + X^2$. On a $AX = X^3 + 2X^2 = 1.B + X^2 + X + 1$, ainsi $\varphi(X) = 1 + X + X^2$. On a $AX^2 = (X + 1)B + 1 + 2X$, ainsi $\varphi(X^2) = 1 + 2X$. Ce qui montre bien que $\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(\varphi) = M$.

Q4. Tout d'abord, $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X-1 & -(X+1) \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} (C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$, ainsi $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -3 & X-2 & 0 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 + L_3)$. Ainsi $\chi_M(X) = (X+1) \begin{vmatrix} X & -1 \\ -3 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)(X(X-2)-3) = (X+1)(X^2-2X-3) = (X+1)^2(X-3)$. Ainsi $\text{Sp}(M) = \{-1, 3\}$.

Notons, pour $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_3)$ l'espace propre de valeur propre λ de M .

On a $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cette matrice est de rang un, donc d'après le théorème du rang son noyau

est de dimension deux, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du noyau de

$M + I_3$, ainsi $E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. *Alternative :* On peut bien entendu déterminer le noyau en résolvant un système.

On a $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(M) \iff$

$$\begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -4y + 8z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + -z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ . Ainsi } E_{-3}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Alternative : On peut signaler que $\text{Ker}(M - 3I_3)$ est de dimension 1 (car valeur propre simple) et remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans ce noyau.

Q5. On a $\dim(E_1(M)) + \dim(E_{-3}(M)) = 2 + 1 = 3$, ainsi M est donc φ est diagonalisable, de plus on a que $(1 - X, 1 - X^2, 1 + 2X + X^2)$ est une base constituée de vecteurs propres de φ .

Partie III – Étude d'un second exemple

Correction :

Q6. On a $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2 = 0.B + \alpha + \beta X + \gamma X^2$, ainsi $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. On a $AX = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = \gamma B + \alpha X + \beta X^2$, ainsi $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$. On a $AX^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = (\beta + \gamma X)B + \alpha X^2$, ainsi $\varphi(X^2) = \alpha X^2$. Ce qui montre bien que $\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(\varphi) = T$.

Q7. Comme T est triangulaire, $\text{Sp}(T) = \{\alpha\}$, on a : T diagonalisable $\iff \exists P \in \text{GL}_3(\mathbb{C}) / T = P\alpha I_3 P^{-1} \iff T = \alpha I_3 \iff \beta = \gamma = 0$. Ainsi φ est diagonalisable si et seulement si A est constant.

Partie IV – Étude du cas où B est scindé à racines simples

Correction :

Q8. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $D(x_k) = P(x_k) - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i(x_k)$, or pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $L_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$, ainsi $D(x_k) = P(x_k) - P(x_k) = 0$. On a bien montré que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme D .

Q9. Le polynôme D est de degré inférieur ou égal à n (car combinaison linéaire de polynômes qui le sont), or D possède $n+1$ racines distinctes d'après la question précédente, ainsi $D = 0$, ce qui montre bien que

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i.$$

Q10. D'après la question précédente, la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$, comme elle possède $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ éléments, on a bien que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Alternative : On peut aussi montrer la liberté : Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_n L_n = 0$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en évaluant l'égalité en x_k on obtient $\lambda_k = 0$, ceci étant vérifié pour tout k , la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre, et comme elle est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, on a bien que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q11. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. On a $AL_k = Q_k B + R_k$. On évalue cette égalité en x_j , ainsi $A(x_j)L_k(x_k) = Q_k(x_j)B(x_j) + R_k(x_j)$, or $B(x_j) = 0$ et $L_k(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$, ce qui montre bien que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\varphi(L_k) = R_k$, en appliquant Q9 à R_k on a $R_k = \sum_{i=0}^n R_k(x_i)L_i$, ainsi, d'après la question précédente $R_k = A(x_k)L_k$, ce qui montre bien que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

Q13. On vient de montrer, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, que L_k (qui est non nul) est vecteur propre de φ de valeur propre L_k , ainsi $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de vecteurs propres de φ , ainsi φ est diagonalisable, et on a aussi que les valeurs propres de φ sont $A(x_0), \dots, A(x_n)$.

EXERCICE 5 : E3A MPI 2024, exercice 3 (sans le préliminaire et les séries génératrices)

Correction :

Q1. Si $n > N$, on remplit au minimum une case et on peut remplir toutes les cases, dans ce cas $T_n(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$. Si $n \leq N$, on remplit au minimum une case et on peut remplir au maximum n cases, ainsi $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. On a donc, dans tous les cas : $T_n(\Omega) = \llbracket 1, \min(n, N) \rrbracket$.

Q2. Tout d'abord on a clairement que T_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1. En effet avec une seule boule il y a toujours exactement une case non vide.

Avec deux boules on peut remplir une ou deux cases (on rappelle que $N \geq 2$), ie $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$. Notons B_i la variable aléatoire donnant la case de la i -ième boule. Les variables aléatoires B_i sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$.

On a $(T_2 = 1) = \bigcup_{i=1}^N (B_1 = i) \cap (B_2 = i)$, ainsi par incompatibilité des événements composant l'union et par

indépendance des événements dont on prend l'intersection : $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(B_1 = i) \mathbb{P}(B_2 = i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2}$

ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}}$. Par suite : $\boxed{\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1) = 1 - \frac{1}{N}}$.

Autre explication : $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \mathbb{P}(\text{la première boule va dans n'importe case et la 2ème va dans la case de la première boule}) = \frac{1}{N}$ par indépendance.

Q3. De manière identique à la question précédente $\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(B_1 = i, \dots, B_n = i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^n}$ et ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}}}.$$

Dans le sujet original il était aussi demandé $\mathbb{P}(T_n = 2)$. Si l'événement $(T_n = 2)$ alors toutes les boules sont dans deux cases, disons i et j avec $i < j$ (il y a donc $\frac{N(N-1)}{2}$ possibilités), On note K l'ensemble des indices des boules qui sont dans la case i , comme K peut être une partie quelconque de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui ne peut être ni l'ensemble vide ni $\llbracket 1, n \rrbracket$ (il doit y avoir au moins un élément dans K et un élément qui n'est pas dans K), il y a $2^n - 2$ possibilités pour K , notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des K possible. On a alors :

$$(T_n = 2) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \bigcup_{K \in \mathcal{P}} \left(\bigcap_{k \in K} (B_k = i) \cap \bigcap_{k \notin K} (B_k = j) \right).$$

Ainsi, toujours par incompatibilité et indépendance, on a $\mathbb{P}(T_n = 2) =$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{K \in \mathcal{P}} \left(\prod_{k \in K} \mathbb{P}(B_k = i) \prod_{k \notin K} \mathbb{P}(B_k = j) \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{K \in \mathcal{P}} \frac{1}{N^n} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{2^n - 2}{N^n} = \frac{N(N-1)}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}.$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\mathbb{P}(T_n = 2) = \frac{(N-1)(2^{n-1} - 1)}{N^{n-1}}}.$$

Q4. Tout d'abord, $\boxed{\text{si } n > N, \text{ on a } \mathbb{P}(T_n = n) = 0}$, en effet il y a au maximum N cases occupées.

Si $n \leq N$, l'événement $(T_n = n)$ correspond au fait que les n boules sont dans des cases distinctes, il y a $\binom{N}{n}$ manières de choisir les cases occupées, ce choix fait il y a $n!$ manière de répartir les boules dans les cases choisies, tout ceci étant choisi la probabilité d'une réalisation vaut $\frac{1}{N^n}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } n \leq N, \text{ on a } \mathbb{P}(T_n = n) = \binom{N}{n} \frac{n!}{N^n}}.$$

Q5. La famille $(T_n = i)_{1 \leq i \leq \min(n, N)}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales

donne alors $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{\min(N, n)} \mathbb{P}(T_n = i) \mathbb{P}(T_n = i | T_{n+1} = k)$. Or, si $T_n = i$ alors T_{n+1} ne peut valoir que i ou $i + 1$, ainsi $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_n = k) \mathbb{P}(T_n = k | T_{n+1} = k) + \mathbb{P}(T_n = k-1) \mathbb{P}(T_n = k-1 | T_{n+1} = k)$.

On a $\mathbb{P}(T_n = k | T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$ (on a k cases occupées par les n premières boules, donc la probabilité que la $(n+1)$ -ième boule tombe dans une des k cases occupées est donc de $\frac{k}{N}$).

On a aussi $\mathbb{P}(T_n = k-1 | T_{n+1} = k) = \frac{N-(k-1)}{N}$ (la $(n+1)$ -ième boule doit tomber dans une case non occupée),

$$\text{ainsi : } \boxed{\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} \mathbb{P}(T_n = k-1)}.$$

Q6. (a) La variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli, l'événement $(X_i = 0)$ se réalise si et seulement si toutes les boules tombent dans une case différente de i , ie $(X_i = 0) = \bigcap_{k=1}^n (B_k \neq i)$, ainsi, par indépendance,

$$\text{on a } \boxed{\mathbb{P}(X_i = 0) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n}, \text{ par suite } \boxed{\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n}.$$

$$(b) \text{ On a } T_n = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$(c) \text{ Par linéarité de l'espérance } \mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i), \text{ or } \mathbb{E}(X_i) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n, \text{ ainsi}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = N \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)}.$$