

Correction du CONCOURS BLANC « MINES-CENTRALE » PC-PSI

PROBLÈME 1 : CENTRALE-SUPELEC PSI 2016

Partie I – Transformation de Fourier

Correction :

I.A La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (discontinuité en $\pm \frac{1}{2}$ avec des limites à droite et à gauche). Ainsi φ est intégrable sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, comme φ est nulle sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ (resp. $]-\infty, -\frac{1}{2}[$) elle y est intégrable. On vient de montrer que : $\boxed{\varphi \in E_{cpm}}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a directement : $\mathcal{F}(\varphi)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi xt} dt = \left[-\frac{e^{-2i\pi xt}}{2i\pi x} \right]_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{2i\pi x} (e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. De plus $\boxed{\mathcal{F}(\varphi)(0) = \int_{-1/2}^{1/2} dt = 1}$. Remarque $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.B

I.B.1 La fonction ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Elle est continue en 0 car $\psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi x}{\pi x} = 1$, et, pour $x \neq 0$, $\psi'(x) = \frac{\pi^2 x \cos(\pi x) - \pi \sin(\pi x)}{\pi^2 x^2} = \frac{1}{\pi^2 x^2} \left(\pi^2 x (1 + o_{x \rightarrow 0}(x)) - \pi (\pi x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)) \right) = o_{x \rightarrow 0}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, ainsi ψ est dérivable en 0 d'après le théorème de la limite de la dérivée et $\psi'(0) = 0$, ψ' est donc continue en 0 (car $\lim_{x \rightarrow 0} \psi'(x) = \psi'(0)$), ainsi $\boxed{\psi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Remarque : dans le sujet la question était : "Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ ".

Correction : On sait que $\sin$ est DSE de rayon infini, ainsi pour $x \neq 0$ on a : $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$. La formule est encore vérifiée pour $x = 0$. On a donc trouvé le DSE de ψ et montré que son rayon de convergence est infini. Comme la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son disque ouvert de convergence, on a que : $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

I.B.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [n, n+1]$, on a $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\int_n^{n+1} |\psi(x)| dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_n^{n+1} |\sin(\pi x)| dx$. Comme $x \mapsto |\sin(\pi x)|$ est 1-périodique, $\int_n^{n+1} |\sin(\pi x)| dx = \int_0^1 |\sin(\pi x)| dx = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$. On en déduit donc que $\boxed{\int_n^{n+1} |\psi(x)| dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}}$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_0^n |\psi(x)| dx \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (divergence de la série harmonique). Ceci montre que la fonction $M \mapsto \int_0^M |\psi(x)| dx$ qui est croissante diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, ainsi ψ n'est pas intégrable et en particulier $\boxed{\psi \notin E_{cpm}}$.

I.C Soit $f \in E_{cpm}$, appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètres. On a :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, pour $(x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}$, $|f(t)e^{-2i\pi xt}| = |f(t)|$, la fonction de domination (qui est bien indépendante de x) est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et donne $\boxed{\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R})}$.

I.D

I.D.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis. Comme $x \mapsto x^{n+3} f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ on a que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^n f(x) = 0$ (comme produit d'une fonction qui tend vers 0, $x \mapsto \frac{1}{x}$ en l'occurrence, et d'une fonction bornée), ainsi $x^n f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(1/x^2)$, on a donc l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, il en va de même en $-\infty$. On a bien montré que $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$

I.D.2 On va maintenant appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres. On a :

- $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ sa dérivée n -ième est $x \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}$ on a $|(-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}| = (2\pi)^n |t^n f(t)|$. La fonction de domination (qui est bien indépendante de x) est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf I.D.1).

Le théorème s'applique et donne $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(\mathcal{F}(f))^{(n)}(x) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi xt} dt.$$

I.E

I.E.1 La fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k \theta(x) = 0$ (par croissances comparés), ainsi (définition de la limite avec un $\varepsilon = 1$ par exemple) $x \mapsto x^k \theta(x)$ est bornée sur $[1, +\infty[$, comme elle est bornée sur $[0, 1]$ (fonction continue sur un segment) elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}$ (car est paire ou impaire en fonction de la parité de k). On viens donc de montrer que : $\theta \in \mathcal{S}$.

La question précédente donne la dérivabilité de $\mathcal{F}(\theta)$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)'(x) = (-2i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi xt} dt$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)'(x) + 2\pi x \mathcal{F}(\theta)(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi t - 2i\pi x) e^{-\pi t^2 - 2i\pi xt} dt = \left[e^{-\pi t^2 - 2i\pi xt} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Ainsi : $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2\pi xy(x) = 0$.

I.E.2 On résout cette EDL₁ : les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto C e^{-\pi x^2}$ où C est une constante.

Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)(x) = C e^{-\pi x^2}$, or $\mathcal{F}(\theta)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) dx = 1$,

ainsi $C = 1$. D'où : $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

Remarque : $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) dx$ est l'intégrale de Gauss.

Partie II – Formule d'inversion de Fourier**Correction :**

II.A Pour $n \in \mathbb{N}$ on introduit $u_n : x \mapsto \mathcal{F}(f)(x) \theta\left(\frac{x}{n}\right)$ et on va utiliser le théorème de convergence dominée. On a :

- La fonction θ étant continue en 0 (et $\theta(0) = 1$), (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{F}(f)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour la limite simple de (u_n) .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leq |\mathcal{F}(f)(x)|$ (car $|\theta|$ est majorée par 1), la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le TCD s'applique et donne que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x) dx$.

II.B On va encore appliquer le TCD, pour $n \in \mathbb{N}$ on introduit (on a montré en I.E.2 que : $\mathcal{F}(\theta) = \theta$) : $v_n : t \mapsto \theta(t) f\left(\frac{t}{n}\right)$.

- Comme f est continue en 0, (v_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(0)\theta$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour la limite simple de (v_n) .
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, comme $f \in \mathcal{S}$ et donc f est bornée sur $\mathbb{R}$, on a : $|v_n(x)| \leq \|f\|_\infty \theta(x)$, la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi le TCD s'applique et donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt = f(0)$.

II.C En utilisant la définition de $\mathcal{F}(f)$, on a : $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi x t} \theta\left(\frac{x}{n}\right) dt \right) dx$. La formule de Fubini donne alors : $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi x t} \theta\left(\frac{x}{n}\right) dx \right) dt$. Dans l'intégrale interne on procède au changement de variable $u = x/n$ (linéaire donc licite) et on trouve que $I_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2in\pi u t} \theta(u) du \right) dt$. Dans l'autre intégrale on procède au changement de variable $v = nt$ (linéaire donc licite) et on trouve : $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-2i\pi u t} \theta(u) du \right) dt$. Ainsi $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi u t} \theta(u) du \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \mathcal{F}(\theta)(t) dt = J_n$, on a bien montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = J_n.$$

II.D En faisant tendre n vers $+\infty$ dans II.C et en utilisant les limites calculées en II.A et II.B on a :

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x) dx.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et utilisons la fonction $h : t \mapsto f(x+t)$. Cette fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, vérifions qu'elle est dans $\mathcal{S}$, soit $k \in \mathbb{N}$, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| > |x| + 1$ (pour pouvoir diviser par $(x+t)$), $t^k h(t) = t^k f(x+t) = \underbrace{\frac{t^k}{(x+t)^k}}_{\xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{1}} \underbrace{(x+t)^k f(x+t)}_{\text{borné car } f \in \mathcal{S}}$. Ce qui montre que h est bornée au voisinage de $\pm\infty$

donc sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle y est continue.

En appliquant ce qu'on a fait en début de question à h on a : $f(x) = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(h)(y) dy$. Il ne reste plus qu'à effectuer le changement de variable $u = x+t$ (affine donc licite) pour obtenir : $\mathcal{F}(h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-2i\pi t y} dt = e^{2i\pi y x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi u y} du = e^{2i\pi y x} \mathcal{F}(f)(y)$. On a donc montré

$$\text{que : } f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi y x} \mathcal{F}(f)(y) dy.$$

II.E La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ est dans $\mathcal{S}$ (elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par toute puissance de x par croissances comparées). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t| - 2\pi i t x} dt$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{t(1-2\pi i x)} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{t(-1-2\pi i x)} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{1-2\pi i x} e^{t(1-2\pi i x)} \right]_{t=-\infty}^{t=0} - \left[\frac{1}{1+2\pi i x} e^{t(-1-2\pi i x)} \right]_{t=0}^{t=+\infty} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-2\pi i x} + \frac{1}{1+2\pi i x} \right) \\ &= \frac{1}{1+4\pi^2 x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question précédente, on a montré, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que : $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi y x}}{1+(2\pi y)^2} dy$.

Partie VI – Transformation de Laplace

Correction :

VI.A

VI.A.0 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, montrons que $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. On a $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilités totales

avec le SCE $(X = i)_{i \in \mathbb{N}}$ on a : $\mathbb{P}(X+Y = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k-i))$, par indépendance de X et Y on a : $\mathbb{P}(X+Y = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k-i) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k$. Ce qui montre bien que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

VI.A.1 Montrons par récurrence sur n que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$:

Initialisation : Immédiat pour $n = 1$ (le résultat préliminaire montre aussi directement pour $n = 2$).

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 1$, comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, on peut appliquer le résultat préliminaire pour montrer que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda + \lambda = (n+1)\lambda$. Ce qui termine l'hérédité.

Ainsi par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$.

VI.A.2 D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en notant μ et σ l'espérance et l'écart-type de ces variables,

on a : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. En utilisant $\mu = \sigma^2 = \lambda$ on a $\mathbb{P}(|S_n - \lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

VI.A.3 Si $a > b + c$ et $c \geq 0$ alors $|a - b| \geq a - b > c$. On en déduit que : $(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$.

De même si $a \leq b - c$ avec $c \geq 0$ alors $a - b \leq -c \leq 0$ et donc $|a - b| \geq c \geq 0$. Ainsi

$$(S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon).$$

VI.A.4 Séparons en deux cas :

Cas 1 : $x \in [0, \lambda]$. Posons $\varepsilon = \frac{\lambda - x}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ et $x < \lambda - \varepsilon$. On en déduit que $(S_n \leq nx) \subset (S_n \leq n(\lambda - \varepsilon))$ et donc : $0 \leq \mathbb{P}(S_n \leq nx) \leq \mathbb{P}(S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) \leq \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$. Ainsi (par théorème d'encadrement) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = 0$

Cas 2 : $x > \lambda$. Posons $\varepsilon = \frac{x - \lambda}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ et $\lambda + \varepsilon < x$. On en déduit que $(S_n > nx) \subset (S_n > n(\lambda + \varepsilon))$ et donc : $0 \leq \mathbb{P}(S_n > nx) \leq \mathbb{P}(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \leq \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$. Ainsi (par théorème d'encadrement) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n > nx) = 0$ et donc $\mathbb{P}(S_n \leq nx) = 1 - \mathbb{P}(S_n > nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

On a bien montré : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$.

VI.B S_n étant à valeurs entières positives et suivant une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$,

$$\mathbb{P}(S_n \leq nx) = \sum_{0 \leq k \leq [nx]} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{0 \leq k \leq [nx]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}. \text{ La question précédente donne :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq [nx]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}.$$

VI.C

VI.C.1 Avec la formule donnée pour $(\mathcal{L}(f))^{(k)}$ dans le préambule de la partie VI,

$$\text{on a : } \sum_{0 \leq k \leq [nx]} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \sum_{0 \leq k \leq [nx]} \int_0^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} f(t) e^{-nt} dt =$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{0 \leq k \leq [nx]} \frac{(nt)^k}{k!} f(t) e^{-nt} \right) dt. \text{ Posons } F_n : t \mapsto \sum_{0 \leq k \leq [nx]} \frac{(nt)^k}{k!} f(t) e^{-nt}, \text{ la question pré-}$$

cédente (et le résultat admis) disent que (F_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction F définie par $F(t) = f(t)$ pour $t \in [0, x[$, $F(t) = f(x)/2$ pour $t = x$ et $F(t) = 0$ pour $t \in]x, +\infty[$. Appliquons le théorème de convergence dominée :

— (F_n) converge simplement vers F sur $\mathbb{R}_+$.

— Tous les F_n et F sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on a (croissance de la suite des sommes partielles d'une SATP pour

l'inégalité) : $|F_n(t)| \leq |f(t)| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt} = |f(t)|$, la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

(f est nulle et continue en dehors d'un segment donc l'intégrale n'est pas généralisée).

Ainsi le TCD s'applique et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq [nx]} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \int_0^x f(t) dt$.

VI.C.2 $\mathcal{L}$ est linéaire et il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit donc f une fonction continue nulle hors d'un segment et telle que $\mathcal{L}(f) = 0$. La question précédente montre que pour tout x , $\int_0^x f(y) dy = 0$. Ainsi une primitive de f est nulle sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc que f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathcal{L}$ est injective sur l'ensemble des fonctions considérées.

PROBLÈME 2 : MINES-PONT PSI 2022, maths 2 (sans la partie IV)

Partie I – Matrices semi-simples

Correction :

Q1. On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il existerait $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P2I_2P^{-1} = 2I_2$, ce qui n'est pas le cas, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Ainsi A n'est pas semi-simple.

Q2. On a $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -2 \\ 5 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)(X-1) + 10 = X^2 - 4X + 13 = (X-2)^2 + 9 = (X-2-3i)(X-2+3i)$. Ainsi $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{2+3i, 2-3i\}$, comme χ_B est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ainsi B est semi-simple.

On a $B - (2+3i)I_2 = \begin{pmatrix} 1-3i & 2 \\ -5 & -1-3i \end{pmatrix}$. On remarque que $2C_1 - (1-3i)C_2 = 0$, ainsi $V = (2, -1+3i)$ est un vecteur propre de B de valeur propre $2+3i$. Posons $W_1 = (2, -1)$ et $W_2 = (0, 3)$, ainsi (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus $BW_1 = (4, -11) = 2W_1 - 3W_2$ et $BW_2 = (6, 3) = 3W_1 + 2W_2$. Ainsi, si on note

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ on a : } B = Q \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ (ie } a = 1 \text{ et } b = 3 \text{)}.$$

Q3. La matrice M est diagonalisable (car deux valeurs propres distinctes puisque $b \neq 0$), donc M est semi-simple. Ainsi il existe $V \neq 0$ vecteur propre de M de valeur propre μ , ainsi $MV = \mu V$, en conjuguant l'égalité et en utilisant $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on en déduit que $M\bar{V} = \bar{\mu}\bar{V}$, ainsi $\bar{V}$ est un vecteur propre de M de valeur propre $\bar{\mu}$. Notons $W_1 = \text{Re}(V)$ et $W_2 = \text{Im}(V)$, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'égalité $MV = \mu V$ (ie dans $M(W_1 + iW_2) = (a + ib)(W_1 + iW_2)$), on trouve $MW_1 = aW_1 - bW_2$ et $MW_2 = bW_1 + aW_2$. Comme $V = W_1 + iW_2$ et $\bar{V} = W_1 - iW_2$, on a $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(W_1, W_2) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(V, \bar{V})$, ainsi (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{C}^2$, donc une famille libre, comme ces vecteurs sont réels, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base (W_1, W_2) , on

$$a : M = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ et donc } M \text{ est semblable, dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \text{ à } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Q4. On a, par définition, que : i) $\Rightarrow M$ semi-simple. On vient de montrer à la question précédente que : ii) $\Rightarrow M$ semi-simple.

Réciproquement, supposons que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semi-simple, notons Δ le discriminant de χ_M , et séparons en trois cas :

Cas 1 : si $\Delta > 0$ alors χ_M est scindé-simple dans $\mathbb{R}[X]$ et donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et ainsi i) est vérifié

Cas 2 : si $\Delta < 0$ alors χ_M est scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ et ses racines sont deux complexes conjugués $a \pm ib$ avec $b \neq 0$, ainsi ii) est vérifié

Cas 3 : si $\Delta = 0$ alors χ_M possède une unique racine $a \in \mathbb{R}$, comme M est semi-simple alors il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $M = PaI_2P^{-1} = aI_2$, ainsi M est diagonale donc i) est vérifié.

L'équivalence est ainsi démontrée.

Q5. Notons M une matrice presque diagonale semblable à N , et reprenons les notations de la définition : $M = \text{diag}(D, M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q))$ (D matrice diagonale de taille p , $(a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{R}^n$, et $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$). Pour $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\chi_{M(a,b)} = \begin{pmatrix} X-a & -b \\ b & X-a \end{pmatrix} = (X-a)^2 + b^2$, ainsi $\chi_{M(a,b)}$ possède deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nul, ainsi d'après Q3, $M(a, b)$ est semi-simple.

Pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, comme $M(a_i, b_i)$ est semi-simple il existe $P_i \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ et $D_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonale telles que $M(a_i, b_i) = P_i D_i P_i^{-1}$.

Posons la matrice par bloc $P = \text{diag}(I_p, P_1, \dots, P_q)$, cette matrice est inversible et $P^{-1} = \text{diag}(I_p, P_1^{-1}, \dots, P_q^{-1})$, de plus on a $M = P \text{diag}(D, D_1, \dots, D_p) P^{-1}$, ainsi M est semblable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) à une matrice diagonale, donc N aussi. Ainsi N est semi-simple.

- Q6.** Le polynôme χ_N est unitaire de degré n , notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ses racines réelles (éventuellement il n'y en a aucune), comme χ_N est à coefficients réels, si μ est racine alors $\bar{\mu}$ l'est aussi, en notant $(\mu_1, \dots, \mu_q)$ les racines complexes de χ_N de partie imaginaire positive, on alors $(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_q)$ sont aussi racines. Ainsi

$\chi_n = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k) \prod_{k=1}^q (X - \mu_k)(X - \bar{\mu}_k)$. On a $n = p + 2q$, notons alors, pour $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\mu_k = a_k + ib_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ et $b_k \in \mathbb{R}^*$ (car μ_k racine complexe non réelle).

On suppose N semi-simple, ainsi il existe une base $(U_1, \dots, U_p, V_1, \bar{V}_1, \dots, V_q, \bar{V}_q)$ de $\mathbb{C}^n$ où les U_k sont des vecteurs propres (qu'on choisit à coefficient réels) de valeurs propre λ_k et où les V_k sont des vecteurs propres de valeurs propres μ_k .

Posons alors, pour tout k , $W_{1,k} = \text{Re}(V_k)$ et $W_{2,k} = \text{Im}(V_k)$, ainsi $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(V_k, \bar{V}_k) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(W_{1,k}, W_{2,k})$ (cf Q3). Ainsi $(U_1, \dots, U_p, W_{1,1}, W_{2,1}, \dots, W_{1,q}, W_{2,q})$ est une base de $\mathbb{C}^n$, donc est libre et comme les vecteurs qui la constitue sont à coefficients dans $\mathbb{R}$, c'est aussi une base de $\mathbb{R}^n$.

Notons $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(U_1, \dots, U_p)$ et pour tout k , $G_k = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(W_{1,k}, W_{2,k})$, ainsi $\mathbb{R}^n = F \oplus \bigoplus_{k=1}^q G_k$. Le

sous-espace vectoriel F est stable par N (car engendré par des vecteurs propres), et il en va de même pour tous les G_k en effet :

Si $X \in G_k$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X = \alpha W_{1,k} + \beta W_{2,k} = \frac{\alpha}{2}(V_k + \bar{V}_k) + \frac{\beta}{2i}(V_k - \bar{V}_k)$, ainsi $NX = \frac{\alpha}{2}(\mu_k V_k + \bar{\mu}_k \bar{V}_k) + \frac{\beta}{2i}(\mu_k V_k - \bar{\mu}_k \bar{V}_k)$, or $\frac{1}{2}(\mu_k V_k + \bar{\mu}_k \bar{V}_k) = \text{Re}(\mu_k V_k) = a_k W_{1,k} - b_k W_{2,k}$ et $\frac{1}{2i}(\mu_k V_k - \bar{\mu}_k \bar{V}_k) = \text{Im}(\mu_k V_k) = a_k W_{2,k} + b_k W_{1,k}$, ce qui montre bien que $NX \in G_k$.

Le calcul précédent (qui est le même qu'en Q3) donne aussi $NW_{1,k} = a_k W_{1,k} - b_k W_{2,k}$ et $NW_{2,k} = b_k W_{1,k} + a_k W_{2,k}$.

Il ne reste plus qu'à poser P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers la base $(U_1, \dots, U_p, W_{1,1}, W_{2,1}, \dots, W_{1,q}, W_{2,q})$, et le calcul précédent donne $N = P \text{diag}(D, M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q)) P^{-1}$. Ce qui montre bien que

si N est semi-simple alors N est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à une matrice presque diagonale.

Partie II – Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Correction :

- Q7.** Si tous les v_k étaient dans F on aurait $F = E$ puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E , il existe donc $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$. De plus, soit $x \in F \cap \text{Vect}(v_k)$, alors $x \in F$ et il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel

que $x = \alpha v_k$ alors $\alpha = 0$ (sinon $v_k = \frac{1}{\alpha} x \in F$: absurde), donc $x = 0$ ce qui montre que $F \cap \text{Vect}(v_k) = \{0_E\}$

et donc que F et $\text{Vect}(v_k)$ sont en somme directe.

- Q8.** Le sous-espace $\text{Vect}(v_k)$ est stable par u (car engendré par un vecteur propre) et son intersection avec F est $\{0_E\}$, ainsi $\text{Vect}(v_k)$ est dans $\mathcal{A}$, ainsi $1 = \dim(\text{Vect}(v_k)) \in \mathcal{L}$, ainsi $\mathcal{L}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et elle est majorée par n (car tous les sous-espaces vectoriels de E sont de dimension plus petite que n), ainsi $\mathcal{L}$ possède un plus grand élément noté r .

- Q9.** Comme $r \in \mathcal{L}$, il existe $G \in \mathcal{A}$ tel que $\dim(G) = r$, par définition de $\mathcal{A}$ on a G et F en somme directe, supposons qu'il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$ et $v_k \notin G$, ainsi $\text{Vect}(v_k)$ et G sont en somme directe, notons $G' = G \oplus \text{Vect}(v_k)$, on a G' stable par u (comme somme directe de sev qui le sont), de plus $G' \cap F = \{0_F\}$, ainsi G' est un élément de $\mathcal{A}$ de dimension $r + 1$, ce qui contredit la maximalité de r .

Ainsi tous les v_k sont dans F ou dans G , ce qui montre que $F + G = E$, ce qui montre bien que F admet un supplémentaire G dans E , stable par u .

Remarque : on peut aussi poser $H = F + G$ et si $E \neq H$, utiliser Q7.

- Q10.** Notons $H = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$, par hypothèse H possède un supplémentaire G dans E stable par u , supposons que u n'est pas diagonalisable, ainsi $H \neq E$ et donc $\dim(H) \leq n - 1$, ce qui montre que $G \neq \{0_E\}$. Comme G est stable par u , on peut considérer l'endomorphisme u_G , induit par u sur G , son polynôme caractéristique

est de degré $\dim(G) \geq 1$, donc possède des racines, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de u_G , il existe donc $x \in G$ tel que $x \neq 0$ et $u_G(x) = \lambda x$, ainsi $u(x) = \lambda x$ et donc $x \in H$, or $H \cap G = \{0_E\}$, ainsi $x = 0$, ce qui est absurde. Ainsi u est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a ainsi démontré (en Q9 et Q10) la caractérisation suivante :

u est diagonalisable si et seulement si tous les sev de E possèdent des supplémentaires stables par u .

Partie III – Polynômes de Hurwitz

Correction :

Q11. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme à coefficients strictement positifs et α une racine de P . Si on avait $\alpha \geq 0$,

on aurait $P(\alpha) = \sum_{k=0}^d a_k \alpha^k \geq a_0 > 0$ (puisque $\alpha \geq 0$ et tous les a_k sont strictement positifs), ce qui contredit

$P(\alpha) = 0$, ainsi $\alpha < 0$.

Q12. Soit P un polynôme de Hurwitz, et soit R un diviseur de P , il existe donc Q tel que $P = QR$. Soit α une racine de R , alors α est aussi racine de P et donc, puisque P est un polynôme de Hurwitz, on a $\alpha \in \mathbb{R}^-$. Ce qui montre bien qu'un diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

Q13. Un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ est soit de degré 1, soit de degré 2 (sans racine réelle), traitons les deux cas.

Cas 1 : Soit $P = aX + b$ un polynôme de Hurwitz de degré 1 avec $a \geq 0$, ainsi $a > 0$ et $\frac{-b}{a}$ est racine de P , ainsi $\frac{-b}{a} < 0$ et donc $b > 0$, ce qui montre bien que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Cas 2 : Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de Hurwitz de degré 2 avec $a \geq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, on a donc $a > 0$. Les racines de P sont $\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, comme P est un polynôme de Hurwitz on a donc $\frac{-b}{2a} < 0$ et ainsi $b > 0$. Or $b^2 - 4ac < 0$ ainsi $c > \frac{b^2}{4a}$ (puisque $a > 0$) et donc $c > 0$, ce qui montre bien que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Alternative : on peut aussi utiliser les relations coefficients/racines.

On a bien montré le résultat dans tous les cas.

Q14. On suppose $P = (X - z_1)(X - z_2) \in \mathbb{R}[X]$ et que les coefficients de $Q = (X - 2z_1)(X - 2z_2)(X - z_1 - z_2)^2$ sont strictement positifs, en particulier son coefficient constant (produit des racines) : $4z_1z_2(z_1 + z_2)^2 > 0$ et son coefficient devant X^3 (opposé de la somme des racines) : $-4(z_1 + z_2) > 0$. Comme P est à coefficients réels, on a deux possibilités :

Cas 1 : z_1 et z_2 sont réels, la stricte positivité des coefficients de Q donne $z_1z_2 > 0$ et $z_1 + z_2 < 0$, ainsi les deux racines de P sont de même signe et strictement négatives, ainsi P est un polynôme de Hurwitz.

Cas 2 : z_1 et z_2 sont complexes (non réelle) et conjuguées, ainsi $z_2 = \overline{z_1}$. Comme $-4(z_1 + z_2) > 0$ on a $-8\operatorname{Re}(z_1) > 0$, ainsi $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) < 0$ et donc P est un polynôme de Hurwitz.

Dans tous les cas P est un polynôme de Hurwitz.

Q15. Notons $A = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $a_k > 0$ et $P = \sum_{k=0}^{d'} b_l X^l$ où, pour tout $l \in \llbracket 0, d' \rrbracket$, $b_l > 0$.

On a $AB = \sum_{k=0}^{d+d'} c_k X^k$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, d+d' \rrbracket$, on a $c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}$ (où on a posé $a_l = 0$ si $l > d$ et $b_l = 0$ si $l > d'$), on a clairement $c_k \geq 0$, de plus si $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ alors $a_k b_0 > 0$ apparaît dans la somme donc $c_k > 0$, et si $k \in \llbracket d, d+d' \rrbracket$ alors $a_d b_{k-d} > 0$ (puisque $k-d \in \llbracket 0, d' \rrbracket$) apparaît dans cette somme et donc $c_k > 0$.

Ainsi les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

Q16. On suppose $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ et $Q(X) = \prod_{(k,\ell) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} (X - z_k - z_\ell)$ à coefficients réels. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ses racines réelles (éventuellement il n'y en a aucune), notons $(\mu_1, \dots, \mu_q)$ les racines complexes de P de partie imaginaire positive, on alors $(\overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_q})$ sont aussi racines. Ainsi $P(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k) \prod_{k=1}^q (X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k})$ et on a $n = p + 2q$.

On peut remarquer que, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on a $\mu_k + \overline{\mu_k} = 2\operatorname{Re}(\mu_k)$ est racine de Q .

- Sens réciproque : Supposons P et Q à coefficients strictement positifs. Ainsi (d'après Q11) les racines réelles de P et de Q sont strictement négatives, ce qui donne pour P que les λ_i sont strictement négatifs, et pour Q que les $2\operatorname{Re}(\mu_k)$ sont strictement négatifs. Ce qui montre bien que toutes les racines de P sont dans Re^- , ainsi P est un polynôme de Hurwitz.
 - Sens direct : Supposons que P est un polynôme de Hurwitz. Ainsi pour tout i , on a $\lambda_i < 0$ et pour tout k , on a $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$, en particulier $\mu_k + \overline{\mu_k} < 0$. Les polynômes $X - \lambda_i$ sont donc à coefficient strictement positifs, et il en va de même pour les $(X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k}) = X^2 - (\mu_k + \overline{\mu_k})X + \mu_k\overline{\mu_k}$ (car $\mu_k\overline{\mu_k} = |\mu_k|^2 > 0$). Ainsi, en utilisant Q15, on en déduit que P est à coefficients strictement positifs. On procède de même avec Q (ses racines, ie les $z_k - z_l$, sont aussi dans Re^-). Ainsi P et Q sont à coefficients strictement positifs.
- Ainsi, on a bien montré l'équivalence demandée.