
DNS 9 : pour le mercredi 25 mars

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (*exercice 1 E3A PSI 2018*).

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.

Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel \mathbb{R}^n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

- (1) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$
- (2) $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \lambda \geq 0$
- (3) $\exists B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.

2. Soient J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha + 1)I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E .

2.1. Déterminer les éléments propres de J . En déduire ceux de M .

2.2. Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\text{rg}(M) \geq n - 1$.

3. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{C} est A .

3.1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a .

On notera pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i .

3.2. Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b(u_i) = \sqrt{\lambda_i} u_i$.

Justifier que b est un endomorphisme symétrique.

3.3. Démontrer que : $\ker(a) = \ker(b)$.

4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j \implies a_{i,j} < 0)$.

a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{C} est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question 3.2.

4.1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $z_i = b(e_i)$.

On va montrer que la famille (z_1, \dots, z_{n-1}) est libre.

Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0$.

4.1.1. Montrer que l'on a aussi : $\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = 0$.

4.1.2. En utilisant le produit scalaire $\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \right\rangle$, conclure.

4.2. Prouver que : $\text{rg}(A) \geq n - 1$.

Exercice 2 (*exercice 1, E3A PC 2 2018*).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne la matrice identité de taille (n, n) par I_n .

Soit \mathbb{R}^n le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire canonique :

Pour tous $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n , on a :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On note $\vec{u} = (1, \dots, 1)$ le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont égales à 1 et F le sous-espace vectoriel formé par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à \vec{u} .

1. Démontrer que F est l'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

2. Quelle est la dimension de F ?

On considère A_n la matrice de taille (n, n) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a des 0 comme coefficients diagonaux et des 1 partout ailleurs.

3. Énoncer précisément le théorème spectral. Que peut-on en conclure pour la matrice A_n ?

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est dans F . Calculer $A_n X$ en fonction de X .

5. Déterminer les valeurs propres de A_n et, pour chacune de ses valeurs propres, le sous-espace propre associé.

6. Calculer le déterminant de la matrice A_n .

On considère B_n la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par blocs par :

$$B_n = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

7. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n . Démontrer que α est une valeur propre de $(A_n + I_n)$ ou $(A_n - I_n)$.

9. En déduire que les valeurs propres de B_n sont dans l'ensemble $\{-2, 0, n-2, n\}$.

10. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B_n .

Soit M une matrice de taille (n, n) . On lui associe U_M , la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par

$$U_M = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & M \end{pmatrix}.$$

11. On suppose M diagonalisable. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les valeurs propres distinctes de M . Déterminer les valeurs propres de U_M en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

12. La matrice U_M est-elle diagonalisable ?