

---

**DNS 9\*\* : pour le mercredi 25 mars**


---

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

---

## X-E.N.S-E.S.P.C.I. 2024

### Notations

— Dans toute la suite,  $d$  désignera un entier strictement positif. On désignera par  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des matrices carrées de taille  $d \times d$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  on notera

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$$

où  $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^d M_{ii}$  est la trace de la matrice  $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  et  $A^\top$  sa transposée. Selon la convention habituelle,  $M_{ij}$  désigne le coefficient de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne de la matrice  $M$  pour tout  $1 \leq i, j \leq d$ .

— Pour tout vecteur  $u \in \mathbb{R}^d$ , on notera  $|u|$  sa norme euclidienne canonique. Un tel vecteur sera considéré comme un vecteur colonne et  $u^\top$  sera le vecteur ligne associé. On notera  $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top v$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^d$  lorsque  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathbb{R}^d$ . En particulier on aura  $|u|^2 = \langle u, u \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top u$ .

— On notera  $I_d$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ . On désignera par

$$O_d(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid M^\top M = I_d\}$$

le groupe orthogonal sur  $\mathbb{R}^d$  et par

$$SO_d(\mathbb{R}) = \{M \in O_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

le groupe spécial orthogonal, où  $\det(M)$  désigne le déterminant de  $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ . On notera

$$\text{Dep}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times SO_d(\mathbb{R})$$

— Pour toute famille  $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ , on notera  $A = (a_1 \mid \dots \mid a_d)$  la matrice de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  dont la  $i$ -ème colonne de  $A$  est formée des coordonnées du vecteur  $a_i$ .

— Pour toute famille de réels  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$ , on notera  $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  de coefficients diagonaux  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$ .

### 1 – Préliminaires

(1) Soit  $R \in O_d(\mathbb{R})$ . Vérifier que  $\det(R) \in \{-1, +1\}$ .

(2) Vérifier que  $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$  est un produit scalaire sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ .

On notera  $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$  la norme associée.

(3)

(a) Montrer que pour tous  $u, v \in \mathbb{R}^d$  et  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , on a  $\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A \rangle$ .

(b) Montrer que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  pour  $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ .

(c) En déduire que pour tous  $A, B$  et  $C$  dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  on a

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^\top A, C \rangle = \langle AC^\top, B \rangle$$

(4) Soit  $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  une matrice diagonale à coefficients positifs et soit  $R \in O_d(\mathbb{R})$ .

(a) Montrer que pour tout  $1 \leq i \leq d$ , on a  $|R_{ii}| \leq 1$  où  $R_{ii}$  est le  $i$ -ème coefficient diagonal de  $R$ .

(b) En déduire que  $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)$ .

## 2 – Ensemble des déplacements de $\mathbb{R}^d$

Pour tout  $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ , on note  $\phi_g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  l'application définie par

$$\phi_g(x) = Rx + \tau$$

On remarquera que lorsque  $\tau = 0$ ,  $\phi_g$  est une rotation vectorielle de l'espace  $\mathbb{R}^d$ , et lorsque  $R = I_d$ ,  $\phi_g$  est une translation. Dans le cas général, on dira que  $\phi_g$  est un déplacement de l'espace  $\mathbb{R}^d$ .

- (5)
- Vérifier que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^d$  et  $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ , on a  $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a - b|$ .
  - Montrer pour tous  $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ , on a  $\phi_g = \phi_{g'}$  si et seulement si  $g = g'$ .
  - Montrer qu'il existe un unique  $e \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$  tel que  $\phi_e$  soit l'application identité sur  $\mathbb{R}^d$  c'est-à-dire que  $\phi_e(x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- (6)
- Vérifier que pour tous  $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ , il existe un unique  $g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$  tel que  $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$ . On notera  $g'g$  cet élément dans la suite.
  - Vérifier que pour tous  $g_1, g_2$  et  $g_3$  dans  $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$  on a  $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ .
- (7) Soit  $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ .
- Montrer que  $\phi_g$  est bijective. On note  $\phi_g^{-1}$  son application réciproque.
  - Montrer qu'il existe un unique  $g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ , que l'on explicitera en fonction de  $g$ , tel que  $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$ . On notera  $g' = g^{-1}$ .
  - Vérifier que  $ge = eg = g$  puis que  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ .
- (8) Pour quelles valeurs de  $d$  a-t-on  $gg' = g'g$  pour tous  $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$  ?

## 3 – Distance à déplacement près

On considère  $n$  un entier strictement positif et

$$\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \mid z_i \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq n \right\}$$

l'espace vectoriel des familles de  $n$  points dans  $\mathbb{R}^d$  muni de la norme  $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$ . Pour tous  $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$  et  $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$  on note

$$g \cdot \mathbf{z} = (\phi_g(z_i))_{1 \leq i \leq n} \quad (1)$$

- (9)
- Montrer que pour tous  $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$  et  $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ , on a  $g \cdot (g' \cdot \mathbf{z}) = (gg') \cdot \mathbf{z}$ .
  - Montrer que pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$  et tout  $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ , si  $\mathbf{x} = g \cdot \mathbf{y}$  alors  $\mathbf{y} = g^{-1} \cdot \mathbf{x}$ .

Pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ , on note

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf \{ \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \}$$

- (10)
- Montrer que pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$  et tout  $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ , on a
- $$\|g \cdot \mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$
- En déduire que  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .
  - Montrer que pour tous  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$  et  $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$ , on a

$$\|\mathbf{z} - g \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg') \cdot \mathbf{y}\| + \|g' \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

- En déduire que  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ .
- (11) Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ , on note  $c(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}) \mid \exists g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d), g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \}$ .
- Montrer que si  $c(\mathbf{x}) \cap c(\mathbf{y}) \neq \emptyset$  alors  $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$ .
  - Montrer que si  $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$  alors  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

## 4 – Un problème d'optimisation

On fixe dans cette partie  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$  et on introduit pour tout  $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - (R\mathbf{x}_i + \tau)|^2 = \|\mathbf{y} - g \cdot \mathbf{x}\|^2$$

où  $g = (\tau, R)$ .

(12) On note  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$  et  $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i$ .

(a) Montrer que  $J(\tau, R) = \left( \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}} - R(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})|^2 \right) + n|\bar{\mathbf{y}} - R\bar{\mathbf{x}} - \tau|^2$ .

(b) En déduire que pour tout  $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ , l'application  $\tau \mapsto J(\tau, R)$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  a un unique minimum, noté  $\tau(R)$ , que l'on explicitera.

(13) On munit  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  de la topologie associée à la norme  $\|M\| = \sqrt{\langle M, M \rangle}$ .

(a) Montrer que l'application  $f : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = A^\top M$  est continue.

(b) Montrer que  $\text{SO}_d(\mathbb{R})$  est un sous-ensemble fermé borné de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ .

(14)

(a) Montrer qu'il existe  $R_* \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$  tel que  $J(\tau(R_*), R_*) \leq J(\tau, R)$  pour tout  $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ .

(b) Montrer que  $R_*$  n'est pas forcément unique.

(15) Montrer que si  $V_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}|^2$  et  $V_n(\mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}|^2$  alors

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = nV_n(\mathbf{x}) + nV_n(\mathbf{y}) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}), R \rangle$$

où  $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est une matrice que l'on précisera.

## 5 – Calcul de $\delta(x, y)$ dans le cas où $\det(Z(x, y)) > 0$

Soit  $Z \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  une matrice inversible. On note  $S = Z^\top Z$ .

(16) Montrer qu'il existe une famille décroissante  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$  de réels strictement positifs et une base orthonormée  $(u_1, \dots, u_d)$  de  $\mathbb{R}^d$  telle que  $Su_i = \lambda_i u_i$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ .

On appellera valeurs singulières de  $Z$  la famille  $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$ .

(17) On considère  $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ .

(a) Montrer que  $(v_1, \dots, v_d)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^d$ .

(b) Vérifier que si  $U = (u_1 | \dots | u_d)$ ,  $V = (v_1 | \dots | v_d)$  et  $D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$  alors  $Z = VDU^\top$ .

(18) Mettre sous la forme précédente  $Z = VDU^\top$ , en spécifiant vos choix de  $U, V$  et  $D$ , les matrices  $Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

et  $Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

(19) On considère que  $\det(Z) > 0$ .

(a) Montrer que si  $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$  alors  $V^\top R U \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ .

(b) Montrer que

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle$$

(20) Donner la valeur de  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en fonction de  $V_n(\mathbf{x}), V_n(\mathbf{y})$  et des valeurs singulières de  $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dans le cas où  $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) > 0$ .

## 6 – Le cas où $\det(Z(x, y)) < 0$

On considère  $R \in \text{O}_d(\mathbb{R})$ .

(21)

(a) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $R$  alors  $\lambda \in \{+1, -1\}$ .

(b) Montrer que  $\det(R + I) = \det(R) \det(I + R^\top)$ .

(c) En déduire que si  $\det(R) = -1$  alors  $\det(R + I) = 0$ .

On suppose dorénavant que  $\det(R) = -1$ .

- (22)
- Montrer qu'il existe une base orthonormée  $(u_1, \dots, u_d)$  de  $\mathbb{R}^d$  telle que l'on a  $Ru_d = -u_d$  et  $u_d^\top Rx = 0$  pour tout  $x \in E_1$  où  $E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1})$ .
  - En déduire que  $R(E_1) \subset E_1$  puis que  $R(E_1) = E_1$ .

On considère une matrice  $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  diagonale de coefficients diagonaux  $\alpha_i \geq 0$  décroissants. On note  $U = (u_1 | \dots | u_d)$ .

- (23)
- Vérifier que  $\langle D, R \rangle = \langle S, R' \rangle$  où  $R' = U^\top RU$  et  $S = U^\top DU$
  - Montrer que si  $R_0 = (R'_{ij})_{1 \leq i, j \leq d-1} \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$  alors  $R_0 \in \text{O}_{d-1}(\mathbb{R})$ .
- (24) On pose  $S_0 = (S_{ij})_{1 \leq i, j \leq d-1} \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ .
- Montrer que  $\langle D, R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{dd}$ .
  - Montrer que  $\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(S_0)$ .
  - Montrer que  $\text{tr}(S_0) + S_{dd} = \text{tr}(D)$  et en déduire que  $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{dd}$ .

- (25)
- Montrer que  $S_{dd} = \sum_{j=1}^d \alpha_j U_{jd}^2$  où  $U = (U_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ .
  - En déduire que  $\langle D, R \rangle \leq \left( \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i \right) - \alpha_d$ .

- (26) Donner la valeur de  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en fonction de  $V_n(\mathbf{x}), V_n(\mathbf{y})$  et des valeurs singulières de  $Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dans le cas où  $\det(Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) < 0$ .