

4h sans calculatrice

Le candidat numérottera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (*proche du cours et/ou des TDs*).

1° Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^{2n}}{\binom{2n}{n}}$.

2° Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum n3^n x^n$.

3° On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

(a) Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?

(b) Calculer explicitement a_n pour chaque n . Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

(c) Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

4° Donner le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Proposer une autre écriture de $\ln(2)$ comme somme d'une série.

Exercice 2 (CCP PSI 2019, *problème 1*).

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt.$$

Q1. Montrer que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

Q2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p .

Q3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p .

Q4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Q5. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q6. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.

Q7. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $|g^{(p)}(0)| \geq p^{2p} e^{-p}$.

Q8. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

Partie II – Le théorème de Borel

Q9. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Q10. On considère la fonction ψ définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \frac{1}{x-i}$.

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Q11. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p -ième de la fonction φ_1 définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Q12. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q13. Pour tout réel α , notons φ_α la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n! a_n^2 x^2}.$$

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!} a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, tout entier $n \geq p$ et tout réel x , on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q15. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q16. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout réel x , on a :

$$\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

Q17. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .

Q18. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geq 1$, on a : $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$.

Q19. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX^e siècle.

Exercice 3 (E3A PSI 2020, *exercice 4*).

Soit E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base \mathcal{B} : $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans \mathbb{R} , linéaire par rapport à chacune de ses variables.

- 1° Soit $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E . Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ .
- 2° Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
- 3° Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ .
- 4° Déterminer un vecteur \vec{k} tel que (\vec{i}, \vec{k}) soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
- 5° Expliciter la matrice de f dans la base (\vec{i}, \vec{k}) . Préciser la nature de f .
- 6° Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \text{id}_E$?

Exercice 4 (problème 1 CCP PSI 2018, partie III : Une équation de Bessel).

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \quad (4)$$

Q19. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $] -R, R[$.

Q20. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}. \end{cases}$$

Q21. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$.

Q22. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k \geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries : $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1$.

Q23. Montrer que si $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} &= 0. \end{cases} \quad (5)$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q24. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}$.

Q25. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$. On pourra raisonner par récurrence.

Q26. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q27. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.

Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q28. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q29. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que : $x \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$ soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.