DS 8⋆ : samedi 14 mars

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(*CENTRALE PC 20017 *Maths 1)***.**
Soit E un ensemble non vide.

On appelle *partition* de E tout ensemble $\mathcal{U} = \{A_1, \dots, A_k\}$ de parties de E tel que
— chaque A_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$ est une partie *non vide* de E ;
— les parties $A_1, \dots, A_k$ sont *deux à deux disjointes*, c'est-à-dire que pour tous $i \neq j$ entre 1 et k, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
— la réunion des A_i forme E tout entier : $E = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Si $\mathcal{U}$ une partition de E et si k est le nombre d'éléments de $\mathcal{U}$, on dit aussi que $\mathcal{U}$ une *partition de E en k parties*.

I] Nombre de partitions en k parties

I.A Soit k et n deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

Dans tout le problème, pour tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.
On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.

I.B Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k dans les cas suivants :

I.B.1) $k > n$;

I.B.2) $k = 1$.

I.C Montrer que pour tous k et n entiers strictement positifs, on a $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.
Indication : On pourra distinguer les partitions de $[\![1, n]\!]$ selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.

I.D

I.D.1) Rédiger une fonction Python récursive permettant de calculer le nombre $S(n, k)$, par application directe de la formule établie à la I.C.

I.D.2) Montrer que, pour $n \geq 1$, le calcul de $S(n, k)$ par cette fonction récursive nécessite au moins $\binom{n}{k}$ opérations (sommes ou produits).

II] Nombres de Bell

Dans toute la suite, on pose pour tout entier $n \geq 0$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$.

II.A Montrer que pour $n \geq 1$, B_n est égal au nombre total de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

II.B Démontrer la formule $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

II.C Montrer que la suite $\left(\dfrac{B_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

II.D En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{B_n}{n!} z^n$.

Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{B_n}{n!} x^n$.

II.E Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.

II.F En déduire une expression de la fonction f sur $]-R, R[$.

III] Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0(X) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $H_k(X) = X(X-1)\cdots(X-k+1)$.

III.A Montrer que la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

III.B

III.B.1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir une expression simplifiée de $H_{k+1}(X) + kH_k(X)$.

III.B.2) En déduire que, pour tout entier naturel n : $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n,k)H_k(X)$.

III.C Soit $k \in \mathbb{N}$.

III.C.1) Montrer que la fonction $f_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}$ est définie sur $]-1,1[$.

III.C.2) Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $g_k : x \mapsto \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^k}{k!}$.

Montrer que la fonction g_k vérifie l'équation différentielle : $y' = \frac{(\mathrm{e}^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + ky$.

III.C.3) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^k}{k!} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}$.

III.D

III.D.1) Pour $x \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\frac{x^k}{k!}$.

III.D.2) Montrer que pour $u < \ln 2$, $\mathrm{e}^{u\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\frac{(\mathrm{e}^u-1)^k}{k!}$.

IV] Fonctions génératrices

On se donne dans la suite un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit m un entier strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ admet un moment d'ordre m fini si Y^m admet une espérance finie, c'est-à-dire si la série $\sum n^m\mathbb{P}(Y=n)$ converge.

On appelle alors moment d'ordre m de Y le réel $\mathbb{E}(Y^m) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^m\mathbb{P}(Y=n)$

IV.A Montrer que si $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ est une variable aléatoire associée à une fonction génératrice G_Y de rayon strictement supérieur à 1, alors Y admet à tout ordre un moment fini.

IV.B Réciproquement, soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire admettant à tout ordre un moment fini.

IV.B.1) Montrer que la fonction génératrice G_Y est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

IV.B.2) Exprimer $G_Y^{(k)}(1)$ à l'aide des polynômes $H_k(X)$ et de la variable Y.

IV.B.3) La fonction génératrice G_Y a-t-elle nécessairement un rayon de convergence strictement supérieur à 1 ?

Indication : On pourra utiliser la série entière $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}x^n$.

IV.C On suppose dans cette question que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.

IV.C.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \mathbb{E}(Y^n)$.

IV.C.2) En déduire que pour tout polynôme $Q(X)$ à coefficients entiers, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q(n)}{n!}$ est convergente et sa somme est de la forme $N\mathrm{e}$, où N est un entier.

V] Somme de puissances

On fixe $n \in \mathbb{N}$. On pose l'application linéaire : $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$.

V.A À l'aide d'un encadrement par des intégrales, déterminer un équivalent de $U_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^n$, à $n \geq 1$ fixé, lorsque p tend vers $+\infty$.

V.B Soit Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur le sous-espace stable $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice A de Δ_n dans la base $(H_0, \dots, H_n)$.

V.C En déduire que $U_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{S(n,k)}{k+1} H_{k+1}(p+1)$.

V.D On note $F = \Big\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\Big\}$, puis $G = \mathrm{Vect}\Big(X^{2k+1}\ ;\ 0 \leq k \leq n-1\Big)$.

Soit $Q(X)$ le polynôme tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $Q(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} k$.

V.D.1) Rappeler l'expression explicite du polynôme $Q(X)$.

V.D.2) Montrer que l'application : $\begin{array}{cccc} \Phi & : & F & \to & G \\ & & P(X) & \mapsto & \Delta\left(P(Q(X-1))\right) \end{array}$ est un isomorphisme.

V.D.3) En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe un seul polynôme $P_r(X)$ tel que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1} = P_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$.

V.E

V.E.1) Déterminer le terme dominant dans $P_r(X)$.

V.E.2) Montrer que pour $r \geq 1$, X^2 divise $P_r(X)$.

V.E.3) Expliciter les polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$.