

## Correction

**Exercice 1** (proche du cours et/ou des TDs).

### Correction :

1° Pour  $x \neq 0$ , posons  $u_n = \frac{x^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{x^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \neq 0$ , on a  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|^{n+1}((n+1)!)(2n)!}{|x|^{2n}(n!)^2(2n+2)!} = \frac{|x|^2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^2}{4}$ , d'après la règle de d'Alembert, si  $x < 2$  la série  $\sum u_n$  converge absolument donc  $R \geq 2$ , et si  $x > 2$  la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement, donc  $R \leq 2$ , ainsi  $R = 2$ .

2° Pour  $x \neq 0$ ,  $\left| \frac{(n+1)3^{n+1}x^{n+1}}{n^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3|x|$ , ainsi si  $3|x| < 1$  la série converge (d'après la règle de d'Alembert), ainsi  $R \geq \frac{1}{3}$ , mais si  $3|x| > 1$  la série diverge grossièrement et donc  $R \leq \frac{1}{3}$ . Ainsi  $R = \frac{1}{3}$ .

Pour  $x \in ]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ , on a  $\sum_{k=1}^{+\infty} k(3x)^k = 3x \sum_{k=1}^{+\infty} k(3x)^{k-1} = \frac{3x}{(1-3x)^2}$  en utilisant  $\sum nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$  (série géométrique dérivée).

3° (a) Soit  $R$  le rayon de convergence de cette SE, pour  $x \in ]-R, R[$  on a :  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ,  $x f'(x) =$

$$x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

On a  $f$  solution de l'ED si et seulement si  $\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n) x^n = 1$  si et seulement si

$$2a_2 + a_0 = 1 \text{ ie } a_2 = \frac{1-a_0}{2} \text{ et, pour tout } n \geq 1, (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0, \text{ ie } a_{n+2} = \frac{-1}{n+2} a_n.$$

(b) Comme on veut  $f(0) = f'(0) = 0$  on a  $a_0 = a_1 = 0$ , on en déduit par récurrence directe que  $a_{2p+1} = 0$ , on en déduit aussi que  $a_2 = \frac{1}{2}$ , puis par récurrence directe que  $a_{2p} = \frac{-1}{2p} \frac{-1}{2p-2} \dots \frac{-1}{4} a_2 = \frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}$  (on a mis 2 en facteur dans tous les termes du dénominateur).

Réciproquement posons  $f$  la somme de la série entière  $\sum \frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!} x^{2p}$ , cette SE admet  $+\infty$  comme rayon de convergence (et est solution de l'ED par construction), pour le montrer on va en même temps gagner du temps sur la question suivante en remarquant que  $\frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!} x^{2p} = \frac{-1}{p!} \left( \frac{-x^2}{2} \right)^p$ , ainsi  $f(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$ .

(c) Déjà fait.

4° Tout d'abord :  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ .

Ici on désire faire  $x = 1$ , mais on a pas le droit, l'égalité n'a lieu que pour  $x \in ]-1, 1[$ . Posons, pour  $x \in [0, 1]$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$  et notons  $S$  la somme de cette série de fonctions.

Cette série de fonction converge simplement sur  $[0, 1[$  vers  $x \mapsto \ln(1+x)$ , de plus elle converge aussi pour  $x = 1$  (série harmonique alternée). Montrons que la convergence est uniforme sur  $[0, 1]$  :

pour  $x \in [0, 1]$ ,  $\sum f_n(-x)$  est une série alternée spéciale qui relève du TSA (car  $\left( \frac{x^n}{n} \right)$  est décroissante et tend vers 0), on a donc la majoration du reste d'ordre  $n$  :  $|R_n(x)| \leq \frac{x^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ , ce dernier majorant ne dépend pas de  $x$  et tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , dit autrement  $\|R_n\|_{\infty}^{[0,1]}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , ainsi le reste converge uniformément vers 0, on a donc la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $[0, 1]$ . Comme toutes les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[0, 1]$ , il en va donc de même pour  $S$ , il ne reste plus qu'à utiliser la continuité

$$\text{en 1 pour obtenir } \ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

On peut appliquer le DSE à  $x = -1/2$  pour obtenir (après multiplication par  $-1$ ) :  $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ .

**Exercice 2** (CCP PSI 2019, *problème 1*).

## Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

### Correction :

- Q1.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction  $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en  $+\infty$ . Or  $t^2|e^{-t(1-itx)}| = t^2e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  (par croissance comparée), ainsi  $e^{-t(1-itx)} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , comme  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (intégrale de Riemann de paramètre  $2 > 1$ ) on en déduit que  $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$  converge absolument donc converge, ainsi  $f(x)$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- Q2.** Soit  $p \in \mathbb{N}$  fixé, la fonction  $t \mapsto t^p e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en  $+\infty$ . Or  $t^2 t^p e^{-t} = t^{p+2} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  (par croissance comparée), ainsi  $t^p e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , comme  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (intégrale de Riemann de paramètre  $2 > 1$ ) on en déduit que  $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$  converge, ainsi  $\Gamma_p$  est bien définie pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .  
Posons, pour  $t \geq 0$ ,  $u(t) = t^{p+1}$  (ainsi  $u'(t) = (p+1)t^p$ ) et  $v(t) = -e^{-t}$  (ainsi  $v'(t) = e^{-t}$ ), les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , le crochet  $\left[u(t)v(t)\right]_0^{+\infty}$  converge (et vaut 0), ainsi on peut procéder à une intégration par parties et on trouve  $\Gamma_{p+1} = \left[-t^{p+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (p+1)t^p e^{-t} dt$ , ie  $\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p$ .
- Q3.** On a  $\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$ . Ainsi, par récurrence directe avec la relation précédente on a  $\Gamma_p = p!$ .
- Q4.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ , montrons que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$  avec le théorème de dérivation  $\mathcal{C}^p$  des intégrales à paramètres, pour cela on pose pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $g(x, t) = e^{-t(1-itx)} = e^{-t} e^{it^2 x}$ .  
— À  $t \geq 0$  fixé,  $x \mapsto g(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$ , de plus pour tout  $\ell \in \llbracket 0, p \rrbracket$  et pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  on a :  $\frac{\partial^\ell g}{\partial x^\ell}(x, t) = (it^2)^\ell e^{-t} e^{it^2 x}$ .  
— Pour  $\ell \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}$  fixé,  $t \mapsto \frac{\partial^\ell g}{\partial x^\ell}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , de plus on a  $\left|\frac{\partial^\ell g}{\partial x^\ell}(x, t)\right| = t^{2\ell} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , ainsi  $t \mapsto \frac{\partial^\ell g}{\partial x^\ell}(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .  
— Hypothèse de domination. Pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , on a  $\left|\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t)\right| = t^{2p} e^{-t}$ , on a bien majoré (on a même égalité) par une fonction intégrable (d'après **Q2**) qui ne dépend pas de  $x$ , l'hypothèse de domination est ainsi établie.  
Ainsi la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t) dt$ . Comme c'est vrai pour tout  $p \in \mathbb{N}$  on a bien que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , de plus pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f^{(p)}(x) = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t} e^{it^2 x} dt$ .
- Q5.** D'après la question précédente, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(p)}(0) = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t} dt = i^p \Gamma_{2p}$ . Ainsi (d'après **Q3**) on a  $\frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p (2p)!}{p!}$ . Ce terme général n'est jamais nul, ainsi pour  $x \neq 0$  :  $\left|\frac{i^{p+1} (2p+2)! x^{p+1}}{(p+1)! p!}\right| = \frac{(2p+2)(2p+1)|x|}{p+1} = 2(2p+1)|x| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Ainsi pour tout  $x \neq 0$  la série  $\sum \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$  diverge grossièrement d'après la règle de d'Alembert. Ainsi son rayon de convergence est 0.  
Si  $f$  était développable en série entière alors  $f$  serait égal à sa série de Taylor dans un voisinage centré en 0 et non réduit à 0, ce qui n'est pas le cas puisque la série de Taylor diverge pour  $x \neq 0$ , ainsi  $f$  n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.
- Q6.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ , montrons que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$  avec le théorème de dérivation terme à terme pour cela on pose pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g_k(x) = e^{-k(1-ikx)} = e^{-k} e^{ik^2 x}$ .  
— Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g_k$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$ , de plus pour tout  $\ell \in \llbracket 0, p \rrbracket$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $g_k^{(\ell)}(x) = (ik^2)^\ell e^{-k} e^{ik^2 x}$ .

— Pour tout  $\ell \in [0, p - 1]$ , la série  $\sum g_k^{(\ell)}$  converge simplement, en effet à  $x \in \mathbb{R}$  fixé,  $|g_k^{(\ell)}(x)| = k^{2\ell} e^{-k} = o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right)$  et  $\sum \frac{1}{k^2}$  est une série de Riemann convergente.

— Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  on a  $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p} e^{-k}$  qui ne dépend pas de  $x$ , ainsi en prenant le sup sur  $x$  on a montré que  $\|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k}$ , avec le même argument que pour le point précédent on a que  $\sum \|g_k^{(p)}\|_\infty$  converge, ainsi  $\sum g_k^{(p)}$  converge normalement (donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$ , comme c'est vrai pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , elle est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus on a montré que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}$  :  $g^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} e^{ik^2 x}$

**Q7.** Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on a (d'après la question précédente) :  $|g^{(p)}(0)| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k}$  (car  $|i| = 1$  et une somme de termes positifs est positive), ainsi  $|g^{(p)}(0)| = p^{2p} e^{-p} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \geq p^{2p} e^{-p}$  (car la somme est positive). Ce qui est bien la minoration demandée.

**Q8.** Pour  $x \neq 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  on a  $\left| \frac{(p+1)^{2p+2} e^{-p-1} x^{p+1}}{(p+1)!} \right| = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{2p} (p+1)e^{-1}|x| \geq p e^{-1}|x| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$  (si on ne pense pas à la majoration on peut montrer que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{2p} = e^2$ ). Ainsi, d'après le critère de d'Alembert  $\sum \frac{p^{2p} e^{-p} x^p}{p!} x^p$  diverge grossièrement, ainsi l'inégalité de la question précédente et le critère de comparaison des séries à terme positives montre que pour tout  $x \neq 0$ ,  $\sum \left| \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p \right|$  diverge. Son rayon de convergence est donc 0 (s'il était strictement positif on aurait de la convergence absolue dans le disque ouvert de convergence, ce qui n'est pas possible).

Comme à la question **Q5** on en déduit que  $g$  n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

## Partie II – Le théorème de Borel

### Correction :

**Q9.** On remarque que pour  $a = \frac{1}{2i}$  et  $b = \frac{-1}{2i}$  on a bien :  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$ .

**Q10.** Tout d'abord,  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , montrons par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$  que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$ .  
Initialisation : Pour  $p = 0$  : pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a d'une part  $\psi^{(0)}(x) = \psi(x) = \frac{1}{x-i}$  et d'autre part  $\frac{(-1)^0 0!}{(x-i)^{0+1}} = \frac{1}{x-i}$  la formule est ainsi établie et la propriété est donc bien initialisée.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un certain  $p \in \mathbb{N}$ , on a donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, \psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$ , on dérive l'égalité et on obtient :  $\forall x \in \mathbb{R}, \psi^{(p+1)}(x) = -(p+1) \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+2}} = \frac{(-1)^{p+1} (p+1)!}{(x-i)^{p+2}}$ , c'est-à-dire la propriété au rang  $n + 1$ , ce qui montre bien l'hérédité.

On a bien montré :  $\forall x \in \mathbb{R}, \psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$ .

**Q11.** On démontre de la même manière qu'à la question précédente (on peut aussi utiliser le fait que la conjugué de la dérivée est égal à la dérivée de la conjugué) que la dérivée  $p$ -ième (pour  $p \in \mathbb{N}$ ) de  $x \mapsto \frac{1}{x+i}$  est  $x \mapsto \frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}$ .

On a montré à la question **Q9** que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\varphi_1(x) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$ . En combinant ces résultats on a donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , que :  $\varphi_1^{(p)}(x) = \frac{1}{2i} \left( \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}} - \frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}} \right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}$ .

**Q12.** Pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  :  $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| = \left| (x+i)^{p+1} - \overline{(x+i)^{p+1}} \right| = |2i \operatorname{Im}((x+i)^{p+1})|$ . Or on sait que pour tout  $z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ , ainsi  $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2|(x+i)^{p+1}| = 2\sqrt{x^2+1}^{p+1}$ , qui est bien le résultat demandé.

On combine avec la question précédente, ainsi pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :  $|\varphi_1^{(p)}(x)| = \left| \frac{(-1)^p p!}{2i} \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}} \right| \leq p! \frac{\sqrt{x^2+1}^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}} = \frac{p!}{(x^2+1)^{(p+1)/2}}$ . Comme  $x \neq 0$ , on a  $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$  et donc  $\frac{1}{(x^2+1)^{(p+1)/2}} \leq \frac{1}{(x^2)^{(p+1)/2}} = \frac{1}{|x|^{p+1}}$ . Ce qui montre bien que  $|\varphi_1^{(p)}(x)| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}$ .

**Q13.** Tout d'abord on remarque que l'inégalité est juste pour  $\alpha = 0$ , supposons maintenant  $\alpha \neq 0$ . On remarque que pour tout  $x \in \mathbb{R}, \varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$ , ainsi (récurrence directe) : pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et pour

tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $\varphi_\alpha^p(x) = \alpha^p \varphi_1(\alpha x)$ . En utilisant la question précédente (on a bien  $\alpha x \neq 0$ ) on en déduit que pour tout  $x \neq 0$  :  $|\varphi_\alpha^p(x)| \leq |\alpha^p| \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{1}{|\alpha|} \frac{p!}{|x|^{p+1}}$ , il ne reste plus qu'à multiplier des deux côtés par  $|\alpha| > 0$  pour en déduire l'inégalité demandée.

On a bien montré que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \neq 0$  :  $|\alpha| |\varphi_\alpha^p(x)| \leq \frac{p!}{|x|^p}$

**Q14.** On remarque que pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , que  $u_n(x) = v_n(x) \varphi_{\alpha_n}(x)$ , où  $v_n : x \mapsto a_n x^n$ . Ainsi  $u_n$  est le produit de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut donc appliquer la formule de Leibniz pour calculer la dérivée  $p$ -ième, de plus pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ . Ainsi pour  $p \leq n$  on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} v_n^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

**Q15.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on remarque que pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  on a  $n-k > 0$  et donc tous les termes de la somme obtenue à la question précédente s'annule pour  $x = 0$ , ce qui montre bien que  $u_n^{(p)}(0) = 0$ .

Pour  $p = n$ , tous les termes pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  s'annule pour  $x = 0$ , il ne reste donc que celui correspondant à  $k = n$ , ainsi  $u_n^{(n)}(0) = a_n \binom{n}{0} \frac{n!}{0!} \varphi_{\alpha_n}^{(0)}(0) = n! a_n \varphi_{\alpha_n}(0) = n! a_n$ .

**Q16.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x = 0$  l'inégalité demandée n'est rien d'autre (d'après la question précédente) que  $0 \leq 0$ , ce qui est juste, on suppose maintenant  $x \neq 0$ .

On a montré à la question **Q13**, pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , que  $|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)| \leq \frac{1}{|\alpha_n|} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}}$ . En combinant ceci à l'inégalité triangulaire appliquée à la formule de la question **Q14** on obtient :  $|u_n^{(p)}(x)| \leq$

$$|a_n| \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} \frac{1}{|\alpha_n|} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}} = |a_n| \frac{1}{|\alpha_n|} |x|^{n-p-1} p! \sum_{k=0}^p \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Or, comme  $p \leq n$  on a

$$\sum_{k=0}^p \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

On a donc montré  $|u_n^{(p)}(x)| \leq |a_n| \frac{1}{|\alpha_n|} |x|^{n-p-1} p! 2^n = \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n$  (en utilisant la définition de  $\alpha_n = \sqrt{n} a_n$ ).

**Q17.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ , montrons que  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$  avec le théorème de dérivation terme à terme (version  $\mathcal{C}^p$  sur tout segment).

— Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$ .

— Pour tout  $\ell \in \llbracket 0, p \rrbracket$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a (d'après la question précédente) :  $|u_n^{(\ell)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-\ell-1}}{\sqrt{n!}} \ell! 2^n$ .

Posons  $x_n = \frac{(2x)^n}{\sqrt{n!}} > 0$ , on a  $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{2|x|}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ainsi d'après le critère de d'Alembert  $\sum x_n$  converge absolument, donc, par comparaison,  $\sum u_n^{(\ell)}(x)$  converge aussi absolument donc converge, ce qui montre bien la convergence simple de  $\sum u_n^{(\ell)}$ .

— Soit  $a > 0$ , pour tout  $x \in [-a, a]$  et pour  $n \geq p+1$  :  $|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n \leq \frac{|a|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n$ , comme notre majorant ne dépend pas de  $x$ , en passant au sup sur  $x \in [-a, a]$ , on a  $\|u_n^{(p)}\|_{\infty}^{[-a, a]} \leq \frac{|a|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n = x_n$ , or  $\sum x_n$  converge (d'après le point précédent) on a que  $\sum_{n > p} \|u_n^{(p)}\|_{\infty}^{[-a, a]}$  converge, et donc que  $\sum_{n \geq 0} \|u_n^{(p)}\|_{\infty}^{[-a, a]}$  (tous les  $u_n$  sont continues sur  $[-a, a]$  donc la norme infinie de  $u_n$  sur  $[-a, a]$  existe, et les premiers termes ne changent pas la nature de la série) converge, ce qui montre que  $\sum u_n$  converge normalement (donc uniformément) sur  $[-a, a]$ .

Ainsi  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur tous les segments  $[-a, a]$  de  $\mathbb{R}$  donc sur  $\mathbb{R}$ , comme c'est vrai pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

elle est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  :  $U^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x)$ .

**Q18.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , d'après la définition de  $u_n$  on a  $u_0(0) = a_0$  et pour  $n > 0$ ,  $u_n(0) = 0$ , ce qui montre bien que  $U(0) = 0$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ , d'après la question **Q15** on a  $u_n^{(p)}(0) = 0$  si  $p \leq n-1$  (ie si  $n \geq p+1$ ) que  $u_p^{(p)}(0) = p! a_p$ . Ainsi,

avec la question précédente, on a  $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$ , qui est le résultat escompté.

**Q19.** Procédons par analyse synthèse et supposons qu'on a construit une suite  $(a_n)$  telle que la fonction  $U$  précédemment définie soit telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $U^{(p)}(0) = b_p$ .

— On a  $U^{(0)}(0) = a_0$ , ainsi  $a_0 = b_0$ .

— On a  $U^{(1)}(0) = u_0'(0) + a_1$ , ainsi  $a_1 = b_1 - u_0'(0)$  (on remarquera que  $u_0$  ne dépend que du choix de  $a_0$ ).

— On a  $U^{(2)}(0) = u_0''(0) + u_1'(0) + 2a_2$ , ainsi  $a_2 = b_2 - u_0''(0) - u_1'(0)$  (on remarquera que  $u_1$  ne dépend que du choix de  $a_1$ ).

— Par suite on a pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $a_p = \frac{1}{p!} \left( b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) \right)$ , on remarquera que  $a_p$  ne dépend que des

$a_0, \dots, a_{p-1}$  et pas des suivant.

On termine notre phase d'analyse, on a même presque démontré la synthèse dedans. En effet on pose  $a_0 = b_0$ , ainsi  $u_0$  est défini, on pose ensuite  $a_1 = b_1 - u'_0(0)$ , ainsi  $u_1$  est défini, supposons construit  $a_0, \dots, a_{p-1}$ , ainsi  $u_0, \dots, u_{p-1}$  sont définis et on pose  $a_p = \frac{1}{p!} \left( b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) \right)$ . On a donc construit correctement par récurrence une suite  $(a_n)$ . La fonction  $U$  associée est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et, d'après la question précédente,  $U(0) = a_0 = b_0$  et pour tout  $p > 1$ ,  $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) = b_p$ . Ce qui démontre le théorème de Borel.

**Exercice 3** (E3A PSI 2020, *exercice 4*).

1° Par bilinéarité de  $\Phi$  on a :  $\Phi(X, Y) = x_1 y_1 \Phi(\vec{i}, \vec{i}) + x_1 y_2 \Phi(\vec{i}, \vec{j}) + x_2 y_1 \Phi(\vec{j}, \vec{i}) + x_2 y_2 \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = x_1 y_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cos(\theta) + x_2 y_2$ .

2° On a déjà que  $\Phi$  est une forme linéaire bilinéaire, la question précédente montre en particulier qu'elle est symétrique.

Soit  $X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} \in E$ , on a  $\Phi(X, X) = x_1^2 + 2x_1 x_2 \cos(\theta) + x_2^2$ , or  $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ , ainsi  $x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \leq \Phi(X, X) \leq x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$ , ainsi  $(x_1 - x_2)^2 \leq \Phi(X, X) \leq (x_1 + x_2)^2$ , comme  $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$  on a bien  $\Phi(X, X) \geq 0$ .

Si de plus on a  $\Phi(X, X) = 0$ , alors, de l'encadrement précédent, on en déduit que  $(x_1 - x_2)^2 = 0$ , ainsi  $x_1 = x_2$ , on en déduit donc que  $\Phi(X, X) = 2x_1^2(1 + \cos(\theta))$ , comme  $\theta \in ]0, \pi[$ , on a  $(1 + \cos(\theta)) \neq 0$ , ainsi  $x_1^2 = 0$ , par suite  $X = \vec{0}$ .

On a bien montré que  $\Phi$  est une forme linéaire définie positive sur  $E$ , ie un produit scalaire sur  $E$ .

*Alternative* pour positif et défini positif, on peut remarquer que :  $\Phi(X, X) = (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + x_2^2(1 - \cos^2(\theta))$ , comme  $1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) > 0$ , on est en présence d'une somme de termes positifs, donc est positive, si elle est nulle on a donc  $(x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 = 0$  et  $x_2^2 \sin^2(\theta) = 0$ , comme le sinus est non nul on a  $x_2 = 0$  et par suite  $x_1 = 0$ , d'où  $X = \vec{0}$ .

3° Soit  $X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} \in E$ , on a  $f(X) = -x_2 \vec{i} + (x_1 + 2x_2 \cos(\theta)) \vec{j}$ . Ainsi (avec 1°) on a :  $\Phi(f(X), f(X)) = (-x_2)^2 + 2(-x_2)(x_1 + 2x_2 \cos(\theta)) \cos(\theta) + (x_1 + 2x_2 \cos(\theta))^2 = x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos(\theta) - 4x_2^2 \cos^2(\theta) + x_1^2 + 4x_1 x_2 \cos(\theta) + 4x_2^2 \cos^2(\theta) = x_1^2 + 2x_1 x_2 \cos(\theta) + x_2^2 = \Phi(X, X)$ . Ainsi, si on pose  $\|X\| = \sqrt{\Phi(X, X)}$  la norme associée, on a montré, pour tout  $X \in E$ , que  $\|f(X)\| = \|X\|$ , ie que  $f$  est une isométrie.

4° Appliquons le procédé de Gram-Schmidt à la base  $\mathcal{B}$ , le premier vecteur est bien unitaire, on pose  $\vec{k} = \vec{j} - \Phi(\vec{j}, \vec{i}) \vec{i} = \vec{j} - \cos(\theta) \vec{i}$ . On a  $\Phi(\vec{k}, \vec{k}) = \cos^2(\theta) - 2\cos^2(\theta) + 1 = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$ . Comme  $\sin(\theta) > 0$  (car  $\theta$  est entre 0 et  $\pi$  strictement), on peut poser  $\vec{k} = \frac{1}{\sin(\theta)} (-\cos(\theta) \vec{i} + \vec{j})$ .

La famille  $(\vec{i}, \vec{k})$  est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de  $\mathcal{B}$ , c'est donc une base orthonormée, de plus  $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) = \frac{1}{\sin(\theta)} \Phi(\vec{j}, -\cos(\theta) \vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{\sin(\theta)} (-\cos^2 \theta + 1) > 0$  (toujours car  $\theta \in ]0, \pi[$ ).

5° On remarque que la définition de  $\vec{k}$  donne directement  $\sin(\theta) \vec{k} = -\cos(\theta) \vec{i} + \vec{j}$ , ie  $(\vec{j}) = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{k}$ .

On a  $f(\vec{i}) = \text{Vect}(j) = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{k}$ . On a donc la première colonne de la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{k})$ , pour continuer on peut déterminer la deuxième colonne en calculant  $f(\vec{j})$  ou plus rapidement utiliser que  $f$  est une isométrie et comme  $\det(C) = 1$  on a  $M \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ . Ainsi  $M$  est une matrice de rotation, comme on connaît la première colonne on en déduit que  $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $f$  est donc la rotation d'angle  $\theta$  de  $E$ .

*Alternative* : on peut déterminer la matrice de passage entre les deux bases et utiliser la formule de changement de base pour obtenir  $M$ .

6° Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^m$  est la rotation d'angle  $m\theta$ , ainsi  $f^m = \text{id}_E \iff m\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

On a donc  $f^m = \text{id}_E$  si et seulement si  $\theta \in \left\{ \frac{2k\pi}{m}, k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{m-1}{2} \rrbracket \right\} \cup \left\{ \frac{m-1}{2} \right\}$  ( $\llbracket 0, \lfloor \frac{m-1}{2} \rrbracket$  car  $\theta$  doit être entre 0 et  $\pi$  strictement, on remarquera que pour  $m \in \{1, 2\}$  il n'y a pas de  $\theta$  qui marche, pour  $m = 3$  il n'y a que  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , etc.).

**Exercice 4** (*problème 1 CCP PSI 2018, partie III : Une équation de Bessel*).

**Correction :**

**Q19.** Le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est  $R = \sup \{r \geq 0 / (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

**Q20.**  $J_0$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -R, R[$  et on peut dériver terme à terme. Pour  $x \in ] -R, R[$  on a  $J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ ,

$$J_0'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1} \text{ et } J_0''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}. \text{ Ainsi :}$$

$$\begin{aligned} x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k \\ &= c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k. \end{aligned}$$

Ainsi  $J_0$  est solution de (4) si et seulement si  $c_1 = 0$  et  $\forall k \geq 2, c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2}$ .

Comme, de plus,  $c_0 = 1$  par hypothèse, on montre, par récurrence directe, que  $\forall k \in \mathbb{N}, c_{2k+1} = 0$  et  $c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}$ .

**Q21.** La série considérée est  $\sum c_{2k} x^{2k}$ . Pour  $x > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$  on pose  $u_k(x) = c_{2k} x^{2k}$ . Ainsi,  $\left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \left| \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 < 1$ . Donc le critère de d'Alembert permet de conclure que cette série entière converge pour tout réel  $x > 0$  et que son rayon de convergence est donc  $R = +\infty$ .

*Remarque* On a donc prouvé que la somme de cette série entière, appelée  $J_0$  dans l'énoncé, est une solution de (4) sur  $\mathbb{R}$ .

**Q22.**  $J_0$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc continue sur le segment  $[0, r]$  et donc bornée sur ce segment. Comme  $J_0$  n'est pas la fonction nulle (elle vaut 1 en 0), donc si  $(J_0, f)$  est une famille liée de l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^2$  sur  $]0, r[$ , il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f = a J_0$  et  $f$  est ainsi bornée sur  $]0, r[$  et donc au voisinage de 0.

**Q23.** Par produit de Cauchy, appliqué aux séries entières (absolument convergentes dans l'intervalle ouvert de convergence) :

$$\forall x \in ] -R_\alpha, R_\alpha[ \cap ] -R_\beta, R_\beta[, \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right) x^n.$$

Or, cette somme vaut 1 par hypothèse donc, par unicité d'écriture d'une série entière, on a :

$$\alpha_0 \beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Comme  $\alpha_0 = 1$  par hypothèse, on obtient :

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

**Q24.** Puisque  $0 < r < R_\alpha$ , par définition du rayon de convergence, la suite  $(\alpha_k r^k)_k$  est bornée, donc il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N} : |\alpha_k r^k| \leq M$  (ie  $|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}$ ).

**Q25.** L'existence d'une unique solution  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de (5) est assez immédiate, comme  $\beta_0 = 1$  on a existence et unicité de  $\beta_0$ , comme  $\alpha_0 = 1$ , la seconde relation dit juste, pour tout  $n \geq 1$ , que  $\beta_n = -\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k}$ , comme la somme dans le membre de droite ne fait intervenir que  $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ , on en déduit que l'existence et l'unicité des  $\beta_k$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  implique l'existence et l'unicité de  $\beta_n$ . Ce qui montre bien le résultat.

Montrons par récurrence (forte) sur  $k \in \mathbb{N}^*$  que :  $H_k : \ll |\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} \gg$ .

— Initialisation : La relation (5) fournit  $\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 = 0$ . Donc  $\beta_1 = -\alpha_1$  et  $|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \frac{M}{r}$ . Cela montre  $H_1$ .

— Hérédité : Prenons  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que  $H_1, \dots, H_k$  soient vraies et montrons que  $H_{k+1}$  est vraie. On a :

$$\begin{aligned} |\beta_{k+1}| &= \left| -\sum_{j=0}^k \alpha_{k+1-j} \beta_j \right| \quad (\text{car } \alpha_0 = 1) \\ &\leq \sum_{j=0}^k |\alpha_{k+1-j}| |\beta_j| \\ &\leq \frac{M}{r^{k+1}} + \sum_{j=1}^k \frac{M}{r^{k+1-j}} \times \frac{M(M+1)^{j-1}}{r^j} \quad (\text{d'après Q.24 et l'hyp. de récurrence}) \\ &\leq \frac{M}{r^{k+1}} + \frac{M^2}{r^{k+1}} \left| \frac{(M+1)^k - 1}{(M+1) - 1} \right| \\ &\leq \frac{M(M+1)^k}{r^{k+1}} \end{aligned}$$

Ainsi,  $H_{k+1}$  est vraie et l'on a établi le résultat souhaité par récurrence.

**Q26.** On déduit de la question précédente, pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  que :  $|\beta_k x^k| \leq \frac{M}{M+1} \left| \frac{(M+1)x}{r} \right|^k$ .

Le membre de droite est le terme général d'une série géométrique convergente si  $\left| \frac{(M+1)x}{r} \right| < 1$ , la série entière est donc convergente pour les  $x$  tels que  $|x| < \frac{r}{M+1}$ , on a donc que  $R_\beta \geq \frac{r}{M+1} > 0$

**Q27.** On note :  $\forall x \in ]0, r[, y(x) = \lambda(x)J_0(x)$  avec  $\lambda$  fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, r[$ . Ainsi,  $y$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, r[$ . Comme  $J_0$  est solution de (4), on obtient :

$$\forall x \in ]0, r[, x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = x^2 \lambda''(x)J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x)J_0'(x) + x\lambda'(x)J_0(x).$$

De plus, en notant  $\forall x \in ]0, r[, h(x) = x\lambda'(x)J_0^2(x)$ , on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lambda'(x)J_0^2(x) + x\lambda''(x)J_0^2(x) + x\lambda'(x)2J_0(x)J_0'(x) \\ &= \frac{J_0(x)}{x} (x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x)). \end{aligned}$$

- Il est donc clair que si  $y$  est solution de (4) sur  $]0, r[$  alors  $h$  est de dérivée nulle sur  $]0, r[$ .
- Réciproquement, supposons que  $h'(x) = 0$  pour tout  $x \in ]0, r[$ . Notons  $g : x \mapsto x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x)$ . Supposons qu'il existe  $x_0 \in ]0, r[$  tel que  $g(x_0) \neq 0$ . Par continuité,  $g$  serait non nulle sur un sous-intervalle de  $]0, r[$  centré en  $x_0$  et  $J_0$  serait donc nulle sur cet intervalle. Comme  $J_0$  est solution de  $u'' + \frac{1}{x}u' + u = 0$  sur  $]0, r[$ ,  $J_0$  serait identiquement nulle sur  $]0, r[$  d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz comme unique solution de (4) s'annulant ainsi que sa dérivée en  $x_0$ . Elle serait donc nulle en 0 par continuité. Cela contredirait la définition de  $J_0$  ( $c_0 = 1$ ). Donc  $g$  est nulle et  $y$  est solution de (4) sur  $]0, r[$ .

**Q28.** Par théorème sur le produit de Cauchy des séries entières,  $J_0^2$  est somme d'une série entière de rayon  $+\infty$ . De plus,  $J_0^2(0) = 1$ .

**Q29.** Cherchons une fonction  $\lambda$  et un réel  $r > 0$  tels que  $\forall x \in ]0, r[, xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1$ .

La question Q27. nous assure alors que  $(x \mapsto \lambda(x)J_0(x))$  est solution de (4) sur  $]0, r[$ .

La question Q28. permet d'appliquer le paragraphe sur l'inverse d'une série entière non nulle en 0 à  $J_0^2$ .

Il existe donc une série entière  $\sum \beta_k x^k$  de rayon  $r > 0$  et telle que  $\beta_0 = 1$  qui vérifie :

$$\forall x \in ]0, r[, J_0^2(x) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1, \quad \text{ainsi } xJ_0^2(x) \left( \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1} \right) = 1'.$$

En prenant, pour  $x \in ]0, r[, \lambda(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \frac{x^k}{k}$ , on obtient bien que :  $\forall x \in ]0, r[, xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1$ .

Posons alors pour  $x \in ]0, r[ : \eta(x) = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \frac{x^k}{k} \right) \times J_0(x)$ . Par produit de Cauchy,  $\eta$  est la somme d'une série entière de rayon  $R_\eta > 0$  et, d'après la question Q27.,  $J_1 : x \mapsto \eta(x) + \ln(x) J_0(x)$  est solution de (4) sur  $]0, R_\eta[$ .

**Q30.** Puisque  $J_0(0) = 1$ , la fonction  $J_1 = \eta + J_0 \times \ln$  n'est pas bornée sur  $]0, R_\eta[$ . D'après la question Q22., la famille  $(J_0, J_1)$  est donc libre dans l'espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, R_\eta[$  et l'on a une base de solutions de (4). On en déduit que l'ensemble des solutions de (4) sur  $]0, R_\eta[$  est :  $\{aJ_0 + b(\eta + J_0 \times \ln) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(J_0, \eta + J_0 \times \ln)$ .